

PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH



PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN



TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1 Phương trình tích

Muốn giải phương trình $(a_1x + b_1)(a_2x + b_2) = 0$, ta giải hai phương trình $a_1x + b_1 = 0$ và $a_2x + b_2 = 0$, rồi lấy tất cả các nghiệm của chúng.

! Trong nhiều trường hợp, để giải một phương trình, ta biến đổi để đưa phương trình đó về dạng phương trình tích.

2 Phương trình chứa ẩn ở mẫu quy về phương trình bậc nhất

Đối với phương trình chứa ẩn ở mẫu, điều kiện của ẩn sao cho các phân thức chứa trong phương trình đều xác định gọi là điều kiện xác định của phương trình.

! – Để tìm điều kiện xác định của phương trình chứa ẩn ở mẫu, ta đặt điều kiện của ẩn để tất cả các mẫu thức chứa trong phương trình đều khác 0.

– Những giá trị của ẩn không thỏa mãn điều kiện xác định thì không thể là nghiệm của phương trình.

Cách giải phương trình chứa ẩn ở mẫu

Bước 1. Tìm điều kiện xác định của phương trình.

Bước 2. Quy đồng mẫu hai vế của phương trình rồi khử mẫu.

Bước 3. Giải phương trình vừa tìm được.

Bước 4. Kết luận. Trong các giá trị tìm được của ẩn ở Bước 3, giá trị nào thỏa mãn điều kiện xác định chính là nghiệm của phương trình đã cho.



CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1. Giải phương trình dạng tích

❖ **Ví dụ 1.** Giải các phương trình sau:

a) $(2x + 1)(3x - 1) = 0$; b) $(3x + 1)(2 - 3x) = 0$; c) $(x + 5)(3x - 9) = 0$; d) $3x(x + 7) = 0$.

Lời giải.

a) Ta có $(2x + 1)(3x - 1) = 0$ nên $2x + 1 = 0$ hoặc $3x - 1 = 0$.

☑ $2x + 1 = 0$ hay $2x = -1$, suy ra $x = -\frac{1}{2}$.

☑ $3x - 1 = 0$ hay $3x = 1$, suy ra $x = \frac{1}{3}$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = -\frac{1}{2}$ và $x = \frac{1}{3}$.

b) Ta có $(3x + 1)(2 - 3x) = 0$ nên $3x + 1 = 0$ hoặc $2 - 3x = 0$.

☑ $3x + 1 = 0$ hay $3x = -1$ suy ra $x = -\frac{1}{3}$

☑ $2 - 3x = 0$ hay $3x = 2$ suy ra $x = \frac{2}{3}$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = -\frac{1}{3}$ và $x = \frac{2}{3}$.

c) Ta có $(x + 5)(3x - 9) = 0$ nên $x + 5 = 0$ hoặc $3x - 9 = 0$.

☑ $x + 5 = 0$ suy ra $x = -5$

☑ $3x - 9 = 0$ hay $3x = 9$ suy ra $x = 3$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = -5$ và $x = 3$.

d) Ta có $3x(x + 7) = 0$ nên $3x = 0$ hoặc $x + 7 = 0$.

☑ $3x = 0$ suy ra $x = 0$

☑ $x + 7 = 0$ suy ra $x = -7$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = 0$ và $x = -7$.

□

❖ **Ví dụ 2.** Giải các phương trình sau:

a) $(x - 7)(5x + 4) = 0;$

b) $(2x + 9)\left(\frac{2}{3}x - 5\right) = 0;$

c) $(x - 5)(2x - 4) = 0;$

Lời giải.

a) Ta có $(x - 7)(5x + 4) = 0$ nên $x - 7 = 0$ hoặc $5x + 4 = 0$.

☑ $x - 7 = 0$, suy ra $x = 7$.

☑ $5x + 4 = 0$ hay $5x = -4$, suy ra $x = -\frac{4}{5}$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = 7$ và $x = -\frac{4}{5}$.

b) Ta có $(2x + 9)\left(\frac{2}{3}x - 5\right) = 0$ nên $2x + 9 = 0$ hoặc $\frac{2}{3}x - 5 = 0$.

☑ $2x + 9 = 0$ hay $2x = -9$, suy ra $x = -\frac{9}{2}$.

☑ $\frac{2}{3}x - 5 = 0$ hay $\frac{2}{3}x = 5$, suy ra $x = \frac{15}{2}$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = -\frac{9}{2}$ và $x = \frac{15}{2}$.

c) Ta có $(x - 5)(2x - 4) = 0$ nên $x - 5 = 0$ hoặc $2x - 4 = 0$.

☑ $x - 5 = 0$, suy ra $x = 5$.

☑ $2x - 4 = 0$, hay $2x = 4$, suy ra $x = 2$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = 5$ và $x = 2$.

□

💡 **Ví dụ 3.** Giải các phương trình sau:

a) $(4x - 5)\left(\frac{6x - 1}{3} + 1\right) = 0;$

b) $\left(\frac{2 + x}{4} - \frac{x}{5}\right)\left(\frac{3x + 5}{6} - \frac{13x - 1}{9}\right) = 0.$

💬 **Lời giải.**

a) Ta có $(4x - 5)\left(\frac{6x - 1}{3} + 1\right) = 0$ nên $4x - 5 = 0$ hoặc $\frac{6x - 1}{3} + 1 = 0$.

☑ $4x - 5 = 0$ hay $4x = 5$, suy ra $x = \frac{5}{4}$.

☑ $\frac{6x - 1}{3} + 1 = 0$ hay $6x + 2 = 0$, suy ra $x = -\frac{1}{3}$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = \frac{5}{4}$ và $x = -\frac{1}{3}$.

b) Ta có $\left(\frac{2 + x}{4} - \frac{x}{5}\right)\left(\frac{3x + 5}{6} - \frac{13x - 1}{9}\right) = 0$ nên $\frac{2 + x}{4} - \frac{x}{5} = 0$ hoặc $\frac{3x + 5}{6} - \frac{13x - 1}{9} = 0$

☑ $\frac{2 + x}{4} - \frac{x}{5} = 0$ hay $5(x + 2) - 4x = 0$ hay $x + 10 = 0$, suy ra $x = -10$.

☑ $\frac{3x + 5}{6} - \frac{13x - 1}{9} = 0$ hay $9(3x + 5) - 6(13x - 1) = 0$ hay $-51x + 51 = 0$, suy ra $x = 1$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = -10$ và $x = 1$.

□

💡 **Ví dụ 4.**

Độ cao h (mét) của một quả bóng gôn sau khi được đánh t giây được cho bởi công thức $h = t(20 - 5t)$. Có thể tính được thời gian bay của quả bóng từ khi được đánh đến khi chạm đất không?



💬 **Lời giải.**

Quả bóng chạm đất khi $h(t) = 0$, do đó ta giải phương trình: $t(20 - t) = 0$.

$$t(20 - t) = 0$$

$$t = 0 \text{ hoặc } 20 - t = 0$$

$$t = 0 \text{ hoặc } t = 20.$$

Vậy thời gian bay của quả bóng từ khi được đánh đến khi chạm đất là $20 - 0 = 20$ giây.

□

📁 Dạng 2. Giải phương trình đưa về dạng phương trình tích

💡 **Ví dụ 5.** Giải các phương trình sau bằng cách đưa về phương trình tích:

a) $x^2 + 7x = 0;$

b) $(3x + 2)^2 - 4x^2 = 0;$

c) $2x(x+6) + 5(x+6) = 0;$

d) $x(3x+5) - 6x - 10 = 0;$

Lời giải.

a) Biến đổi phương trình đã cho về phương trình tích như sau:

$$x^2 + 7x = 0$$

$$x(x+7) = 0$$

$$x = 0 \text{ hoặc } x + 7 = 0$$

$$x = 0 \text{ hoặc } x = -7.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = 0$ và $x = -7$.

b) Biến đổi phương trình đã cho về phương trình tích như sau:

$$(3x+2)^2 - 4x^2 = 0$$

$$(3x+2+2x)(3x+2-2x) = 0$$

$$(5x+2)(x+2) = 0$$

$$5x+2 = 0 \text{ hoặc } x+2 = 0$$

$$x = -\frac{2}{5} \text{ hoặc } x = -2.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = -\frac{2}{5}$ và $x = -2$.

c) Biến đổi phương trình đã cho về phương trình tích như sau:

$$2x(x+6) + 5(x+6) = 0$$

$$(2x+5)(x+6) = 0$$

$$2x+5 = 0 \text{ hoặc } x+6 = 0$$

$$x = -\frac{5}{2} \text{ hoặc } x = -6.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = -\frac{5}{2}$ và $x = -6$.

d) Biến đổi phương trình đã cho về phương trình tích như sau:

$$x(3x+5) - 6x - 10 = 0$$

$$x(3x+5) - 2(3x+5) = 0$$

$$(x-2)(3x+5) = 0$$

$$x-2 = 0 \text{ hoặc } 3x+5 = 0$$

$$x = 2 \text{ hoặc } x = -\frac{5}{3}.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = 2$ và $x = -\frac{5}{3}$.

□

❖ Ví dụ 6. Giải các phương trình sau bằng cách đưa về phương trình tích:

a) $(2x-3)^2 = (x+7)^2;$

b) $x^2 - 9 = 3(x+3);$

c) $x^2 - x = -2x + 2;$

d) $x^2 - 3x = 2x - 6.$

Lời giải.

a) Biến đổi phương trình đã cho về phương trình tích như sau:

$$\begin{aligned}(2x - 3)^2 &= (x + 7)^2 \\ (2x - 3)^2 - (x + 7)^2 &= 0 \\ [(2x - 3) - (x + 7)][(2x - 3) + (x + 7)] &= 0 \\ (x - 10)(3x + 4) &= 0\end{aligned}$$

Ta giải hai phương trình sau:

☑ $x - 10 = 0$ suy ra $x = 10$.

☑ $3x + 4 = 0$ hay $3x = -4$, suy ra $x = -\frac{4}{3}$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = 10$ và $x = -\frac{4}{3}$.

b) Biến đổi phương trình đã cho về phương trình tích như sau:

$$\begin{aligned}x^2 - 9 &= 3(x + 3) \\ (x - 3)(x + 3) - 3(x + 3) &= 0 \\ (x + 3)[(x - 3) - 3] &= 0 \\ [(x + 3)(x - 6)] &= 0.\end{aligned}$$

Ta giải hai phương trình sau

☑ $x + 3 = 0$ suy ra $x = -3$.

☑ $x - 6 = 0$ suy ra $x = 6$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = -3$ và $x = 6$.

c) Biến đổi phương trình đã cho về phương trình tích như sau:

$$\begin{aligned}x^2 - x &= -2x + 2 \\ x^2 - x + 2x - 2 &= 0 \\ x(-x - 1) + 2(x - 1) &= 0 \\ (x + 2)(x - 1) &= 0.\end{aligned}$$

Ta giải hai phương trình sau:

☑ $x + 2 = 0$ suy ra $x = -2$.

☑ $x - 1 = 0$ suy ra $x = 1$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = -2$ và $x = 1$.

d) Biến đổi phương trình đã cho về phương trình tích như sau:

$$\begin{aligned}x^2 - 3x &= 2x - 6 \\ x^2 - 3x - 2x + 6 &= 0 \\ x(x - 3) - 2(x - 3) &= 0 \\ (x - 3)(x - 2) &= 0.\end{aligned}$$

☑ $x - 3 = 0$ suy ra $x = 3$.

☑ $x - 2 = 0$ suy ra $x = 2$.

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = 3$ và $x = 2$.

□

◀ **Ví dụ 7.** Giải các phương trình sau bằng cách đưa về phương trình tích:

a) $3x^2 - 11x + 6 = 0$; b) $-2x^2 + 5x + 3 = 0$; c) $x^3 + 2x - 3 = 0$; d) $x^3 + 8 = x^2 - 4$.

🗨 **Lời giải.**

a) Biến đổi phương trình đã cho về phương trình tích như sau:

$$\begin{aligned} 3x^2 - 11x + 6 &= 0 \\ 3x^2 - 9x - 2x + 6 &= 0 \\ 3x(x - 3) - 2(x - 3) &= 0 \\ (x - 3)(3x - 2) &= 0 \end{aligned}$$

☑ $x - 3 = 0$, suy ra $x = 3$.

☑ $3x - 2 = 0$ hay $3x = 2$, suy ra $x = \frac{2}{3}$.

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = 3$ và $x = \frac{2}{3}$.

b) Biến đổi phương trình đã cho về phương trình tích như sau:

$$\begin{aligned} -2x^2 + 5x + 3 &= 0 \\ -2x^2 + 6x - x + 3 &= 0 \\ -2x(x - 3) - (x - 3) &= 0 \\ (x - 3)(-2x - 1) &= 0 \end{aligned}$$

☑ $x - 3 = 0$, suy ra $x = 3$.

☑ $-2x - 1 = 0$ hay $-2x = 1$, suy ra $x = -\frac{1}{2}$.

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = 3$ và $x = -\frac{1}{2}$.

c) Biến đổi phương trình đã cho về phương trình tích như sau:

$$\begin{aligned} x^3 + 2x - 3 &= 0 \\ x^3 - 1 + 2x - 2 &= 0 \\ (x - 1)(x^2 + x + 1) + 2(x - 1) &= 0 \\ (x - 1)(x^2 + x + 1 + 2) &= 0 \\ (x - 1)(x^2 + x + 3) &= 0. \end{aligned}$$

Vì $x^2 + x + 3 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} > 0$ nên $x - 1 = 0$, suy ra $x = 1$.

Vậy phương trình có nghiệm $x = 1$.

d) Biến đổi phương trình đã cho về phương trình tích như sau:

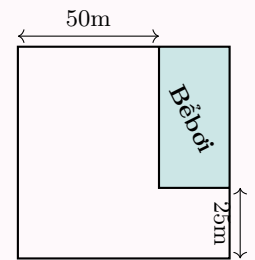
$$\begin{aligned} x^3 + 8 &= x^2 - 4 \\ (x + 2)(x^2 - 2x + 4) - (x + 2)(x - 2) &= 0 \\ (x + 2)(x^2 - 2x + 4 - x + 2) &= 0 \\ (x + 2)(x^2 - 3x + 6) &= 0. \end{aligned}$$

Vì $x^2 - 3x + 6 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} > 0$ nên $x + 2 = 0$, suy ra $x = -2$.

Vậy phương trình có nghiệm $x = -2$.

❖ Ví dụ 8.

Trong một khu đất có dạng hình vuông, người ta dành một mảnh đất, có dạng hình chữ nhật ở góc khu đất để làm bể bơi (Hình 1). Biết diện tích bể bơi bằng $1\,250\text{ m}^2$. Tính độ dài cạnh khu đất đó.



Hình 1

🗨 Lời giải.

Gọi độ dài cạnh khu đất có dạng hình vuông là x (m). Khi đó, mảnh đất dạng hình chữ nhật để làm bể bơi có các kích thước là $x - 50$ (m), ($x > 50$) và $x - 25$ (m). Do đó, diện tích của mảnh đất là $(x - 50)(x - 25)$ (m^2).

Vì vậy, ta có phương trình $(x - 50)(x - 25) = 1\,250$.

Giải phương trình $(x - 50)(x - 25) = 1\,250$

$$(x - 50)(x - 25) - 1\,250 = 0$$

$$x^2 - 75x = 0$$

$$x(x - 75) = 0$$

$$x = 0 \text{ hoặc } x = 75.$$

Do $x > 50$ nên $x = 75$. Vậy độ dài cạnh khu đất là 75 (m). □

❖ Ví dụ 9. Trong một khu vườn hình vuông có cạnh bằng 15 m người ta làm một lối đi xung quanh vườn có bề rộng là x (m). Để diện tích phần đất còn lại là 169 m^2 thì bề rộng x của lối đi là bao nhiêu?

🗨 Lời giải.

Phần đất còn lại vẫn là hình vuông có cạnh $15 - 2x$ (m) nên diện tích phần đất còn lại là $(15 - 2x)^2$.

Do cạnh của hình vuông là một số dương nên $15 - 2x > 0 \Rightarrow x < \frac{15}{2}$.

Theo bài ra ta có phương trình $(15 - 2x)^2 = 169$. Khi đó

$$(15 - 2x)^2 - 13^2 = 0$$

$$(15 - 2x - 13)(15 - 2x + 13) = 0$$

$$(2 - 2x)(28 - 2x) = 0.$$

☑ $2 - 2x = 0$ suy ra $x = 1$

☑ $28 - 2x = 0$ suy ra $x = 14$ (loại).

Vậy lối đi rộng 1 (m). □

📁 Dạng 3. Giải phương trình chứa ẩn ở mẫu

❖ Ví dụ 10. Giải các phương trình:

a) $\frac{x+6}{x+5} + \frac{3}{2} = 2;$

b) $\frac{2}{x-2} - \frac{3}{x-3} = \frac{3x-20}{(x-3)(x-2)};$

c) $\frac{2}{x+1} + \frac{1}{x-2} = \frac{3}{(x+1)(x-2)};$

d) $\frac{1}{x-1} - \frac{4x}{x^3-1} = \frac{x}{x^2+x+1}.$

🗨 Lời giải.

a) Điều kiện xác định: $x \neq -5$

Ta có:

$$\begin{aligned}\frac{x+6}{x+5} + \frac{3}{2} &= 2 \\ \frac{x+6}{x+5} &= \frac{1}{2} \\ 2(x+6) &= x+5 \\ 2x+12 &= x+5 \\ x &= -7 \text{ (thỏa mãn điều kiện xác định).}\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = -7$.

b) Điều kiện xác định: $x \neq 2$ và $x \neq 3$.

Ta có:

$$\begin{aligned}\frac{2}{x-2} - \frac{3}{x-3} &= \frac{3x-20}{(x-3)(x-2)} \\ 2(x-3) - 3(x-2) &= 3x-20 \\ 2x-6-3x+6 &= 3x-20 \\ -4x &= -20 \\ x &= 5 \text{ (thỏa mãn điều kiện xác định).}\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 5$.

c) Điều kiện xác định $x \neq -1$ và $x \neq 2$.

Ta có

$$\begin{aligned}\frac{2(x-2) + (x+1)}{(x+1)(x-2)} &= \frac{3}{(x+1)(x-2)} \\ 2(x-2) + (x+1) &= 3 \\ 2x-4+x+1 &= 3 \\ 3x-3 &= 3 \\ 3x &= 6 \\ x &= 2.\end{aligned}$$

Giá trị $x = 2$ không thỏa mãn ĐKXD. Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

d) Điều kiện xác định $x \neq 1$.

Ta có:

$$\begin{aligned}\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x^2+x+1)} - \frac{4x}{(x-1)(x^2+x+1)} &= \frac{x(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)} \\ x^2+x+1-4x &= x(x-1) \\ x^2+x+1-4x &= x^2-x \\ x^2+x+1-4x-x^2+x &= 0 \\ -2x+1 &= 0 \\ -2x &= -1 \\ x &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Giá trị $x = \frac{1}{2}$ thỏa mãn ĐKXD. Vậy phương trình có nghiệm $x = \frac{1}{2}$.

□

❖ **Ví dụ 11.** Giải các phương trình

$$\text{a) } \frac{x^2}{2-x} + \frac{3x-1}{3} = \frac{5}{3}.$$

$$\text{b) } \frac{4}{x(x-1)} + \frac{3}{x} = \frac{4}{x-1}.$$

$$\text{c) } \frac{x+3}{x-3} + \frac{x-2}{x} = 2.$$

$$\text{d) } \frac{3}{x-2} + \frac{2}{x+1} = \frac{2x+5}{(x-2)(x+1)}.$$

🗨 **Lời giải.**

a) Điều kiện xác định $2-x \neq 0$ hay $x \neq 2$.

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{2-x} + \frac{3x-1}{3} &= \frac{5}{3} \\ \frac{3x^2}{3(2-x)} + \frac{(3x-1)(2-x)}{3(2-x)} &= \frac{5(2-x)}{3(2-x)} \\ 3x^2 + (3x-1)(2-x) &= 5(2-x) \\ 3x^2 + 6x - 3x^2 - 2 + x &= 10 - 5x \\ 7x - 2 &= 10 - 5x \\ 12x &= 12 \\ x &= 1. \end{aligned}$$

Ta thấy $x = 1$ thỏa mãn điều kiện xác định của phương trình.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 1$.

b) Điều kiện xác định $x \neq 0$ và $x \neq 1$.

$$\begin{aligned} \frac{4}{x(x-1)} + \frac{3}{x} &= \frac{4}{x-1} \\ \frac{4}{x(x-1)} + \frac{3(x-1)}{x(x-1)} &= \frac{4x}{x(x-1)} \\ 4 + 3(x-1) &= 4x \\ 4 + 3x - 3 &= 4x \\ 3x + 1 &= 4x \\ x &= 1. \end{aligned}$$

Ta thấy $x = 1$ không thỏa mãn điều kiện xác định của phương trình.

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

c) Điều kiện xác định: $x \neq 3$ và $x \neq 0$.

$$\begin{aligned} \frac{x+3}{x-3} + \frac{x-2}{x} &= 2 \\ \frac{(x+3)x}{x(x-3)} + \frac{(x-2)(x-3)}{x(x-3)} &= \frac{2x(x-3)}{x(x-3)} \\ (x+3)x + (x-2)(x-3) &= 2x(x-3) \\ x^2 + 3x + x^2 - 3x - 2x + 6 &= 2x^2 - 6x \\ 4x &= -6 \\ x &= -\frac{3}{2} \text{ (thỏa mãn điều kiện xác định).} \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = -\frac{3}{2}$.

d) Điều kiện xác định: $x \neq 2$ và $x \neq -1$.

$$\begin{aligned}\frac{3}{x-2} + \frac{2}{x+1} &= \frac{2x+5}{(x-2)(x+1)} \\ 3(x+1) + 2(x-2) &= 2x+5 \\ 3x+3+2x-4 &= 2x+5 \\ 3x &= 6 \\ x &= 2 \text{ (không thỏa mãn điều kiện xác định).}\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

□

❖ **Ví dụ 12.** Hai bạn Phong và Khang cùng hẹn nhau đạp xe đến một vị trí cách vị trí bạn Phong 6 km và cách vị trí bạn Khang 7 km. Hai bạn cùng xuất phát và đến địa điểm đã hẹn cùng một lúc. Tính tốc độ của mỗi bạn, biết tốc độ của bạn Khang hơn tốc độ bạn Phong là 6 km/h.

🗨️ Lời giải.

Gọi tốc độ của bạn Phong là x km/h, ($x > 0$). Khi đó, tốc độ của bạn Khang là $x + 2$ km/h.

Thời gian đi của bạn Phong là $\frac{6}{x}$ (giờ).

Thời gian đi của bạn Khang là $\frac{7}{x+2}$ (giờ).

Do hai bạn cùng xuất phát và đến địa điểm đã hẹn cùng một lúc nên thời gian đi của hai bạn là như nhau. Ta có phương trình

$$\frac{6}{x} = \frac{7}{x+2}.$$

Giải phương trình

$$\begin{aligned}\frac{6}{x} &= \frac{7}{x+2} \\ \frac{6}{x} &= \frac{7}{x+2} \\ \frac{6(x+2)}{x(x+2)} &= \frac{7x}{x(x+2)} \\ 6(x+2) &= 7x \\ 6x+12 &= 7x \\ x &= 12. \text{ (thỏa mãn } x > 0\text{).}\end{aligned}$$

Vậy tốc độ của bạn Phong là 12 km/h, tốc độ của bạn Khang là 14 km/h.

□

❖ **Ví dụ 13.** Biết nồng độ muối của nước biển là 3,5% và khối lượng riêng của nước biển là 1 020 g/ml. Từ 2 lít nước biển như thế, người ta hòa tan thêm muối để được dung dịch có nồng độ muối là 20%. Tính khối lượng muối cần thêm.

🗨️ Lời giải.

Khối lượng của 2 lít nước biển là $1\,020 \cdot 2 = 2\,040$ (g).

Khối lượng muối trong 2 lít nước biển là $2\,040 \cdot 3,5\% = 71,4$ (g).

Gọi khối lượng muối cần hòa tan thêm vào 2 lít nước biển như thế để được dung dịch có nồng độ muối là 20% là x (g) ($x > 0$). Ta có phương trình

$$\frac{71,4+x}{2\,040} = \frac{20}{100}.$$

Giải phương trình $\frac{71,4+x}{2\,040} = \frac{20}{100}$.

$$\begin{aligned}
\frac{71,4 + x}{2040 + x} &= \frac{20}{100} \\
\frac{100 \cdot (71,4 + x)}{100 \cdot (2040 + x)} &= \frac{20 \cdot (2040 + x)}{100 \cdot (2040 + x)} \\
100 \cdot (71,4 + x) &= 20 \cdot (2040 + x) \\
7140 + 100x &= 40800 = 7140 \\
80x &= 33660 \\
x &= 420,75 \text{ (thỏa mãn } x > 0).
\end{aligned}$$

Vậy cần thêm 420,75 (g) muối vào 2 lít nước biển ban đầu để được dung dịch có nồng độ muối là 20%. □

❖ **Ví dụ 14.** Hai thành phố A và B cách nhau 120 km. Một ô tô di chuyển từ A đến B , rồi quay trở về A với tổng thời gian đi và về là 4 giờ 24 phút. Tính tốc độ lượt đi của ô tô, biết tốc độ lượt về lớn hơn tốc độ lượt đi 20%.

💬 Lời giải.

Gọi x là tốc độ lượt đi.

Tốc độ lượt về bằng: $x + 20\% \cdot x = 1,2x$.

Thời gian 4 giờ 24 phút = 4,4 giờ.

Theo đề bài ta có:

$$\begin{aligned}
t_1 + t_2 &= 4,4 \\
\frac{120}{x} + \frac{120}{x + 0,2x} &= 4,4 \\
\frac{120}{x} + \frac{120}{1,2x} &= 4,4 \\
120 \cdot 1,2 + 120 &= 4,4 \cdot 1,2x \\
5,28x &= 264 \\
x &= 50 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}.
\end{aligned}$$

Vậy tốc độ lượt đi là 50 km/h. □

Dạng 4. Biết phương trình có một trong các nghiệm là $x = x_0$. Tìm giá trị của tham số m

- ✔ **Bước 1:** Thay $x = x_0$ vào phương trình đã cho.
- ✔ **Bước 2:** Giải phương trình với ẩn số là m .

❖ **Ví dụ 15.** Cho phương trình $(x + m)^2 - (x - 3m)^2 = 0$ trong đó m là một số cho trước.

- a) Tìm các giá trị của m để phương trình có một trong các nghiệm là $x = 2$.
- b) Với các giá trị của m tìm được ở câu a), hãy giải phương trình đã cho.

💬 Lời giải.

a) Thay $x = 2$ vào phương trình đã cho ta được phương trình

$$\begin{aligned}(2+m)^2 - (2-3m)^2 &= 0 \\ (2+m-2+3m)(2+m+2-3m) &= 0 \\ 4m(-2m+4) &= 0 \\ \begin{cases} m = 0 \\ -2m+4 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} m = 0 \\ m = 2. \end{cases}\end{aligned}$$

b) Trường hợp 1. Với $m = 0$ thì phương trình đã cho trở thành

$$x^2 - x^2 = 0 \Rightarrow 0x^2 = 0.$$

Phương trình nghiệm đúng với mọi x .

Trường hợp 2. Với $m = 2$ thì phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned}(x+2)^2 - (x+6)^2 &= 0 \\ (x+2-x+6)(x+2+x-6) &= 0 \\ 8(2x-4) &= 0 \\ x &= 2.\end{aligned}$$

□

❖ **Ví dụ 16.** Cho phương trình $x^3 - x^2 - 9x - 9m = 0$ trong đó m là một số cho trước. Biết $x = 3$ là một nghiệm của phương trình. Tìm tất cả các nghiệm còn lại.

💬 **Lời giải.**

Thay $x = 3$ vào phương trình ta được

$$27 - 9 - 27 - 9m = 0 \Rightarrow m = -1.$$

Với $m = -1$ thì phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned}x^3 - x^2 - 9x + 9 &= 0 \\ x^2(x-1) - 9(x-1) &= 0 \\ (x-1)(x^2-9) &= 0 \\ (x-1)(x+3)(x-3) &= 0 \\ \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \\ x = 3. \end{cases}\end{aligned}$$

Vậy tất cả các nghiệm còn lại là $x = 1, x = -3$.

□

❖ **Ví dụ 17.** Cho phương trình $\frac{x-2}{x-4} + \frac{x-3}{x-2} = \frac{m}{3}$ trong đó m là một số cho trước. Biết $x = 5$ là một trong các nghiệm của phương trình, tìm các nghiệm còn lại.

💬 **Lời giải.**

🕒 Thay $x = 5$ vào phương trình đã cho ta được

$$\frac{3}{1} + \frac{2}{3} = \frac{m}{3} \Rightarrow m = 11.$$

- ☑ Thay $m = 11$ vào phương trình đã cho ta được

$$\frac{x-2}{x-4} + \frac{x-3}{x-2} = \frac{11}{3} \quad (1)$$

ĐKXD: $x \neq 4; x \neq 2$.

$$\begin{aligned} (1) &\Rightarrow 3(x-2)^2 + 3(x-3)(x-4) = 11(x-4)(x-2) \\ &3(x^2 - 4x + 4) + 3(x^2 - 7x + 12) = 11(x^2 - 6x + 8) \\ &3x^2 - 12x + 12 + 3x^2 - 21x + 36 = 11x^2 - 66x + 88 \\ &5x^2 - 33x + 40 = 0 \\ &(x-5)(5x-8) = 0 \\ &\begin{cases} x = 5 \\ x = \frac{8}{5} \end{cases} \text{ (thỏa mãn ĐKXD).} \end{aligned}$$

Vậy nghiệm còn lại là $x = \frac{8}{5}$. □

💡 **Ví dụ 18.** Cho phương trình $\frac{2x+m}{x-1} = \frac{5(x-1)}{x+1}$.

Chứng minh rằng nếu $x = \frac{1}{3}$ là một nghiệm của phương trình thì phương trình còn có một nghiệm nguyên.

💬 **Lời giải.**

- ☑ Thay $x = \frac{1}{3}$ vào phương trình đã cho ta được

$$\frac{\frac{2}{3} + m}{\frac{1}{3} - 1} = \frac{5 \cdot \left(\frac{1}{3} - 1\right)}{\frac{1}{3} + 1} \Rightarrow \frac{-(2+3m)}{2} = \frac{-5}{2} \Rightarrow m = 1.$$

- ☑ Thay $m = 1$ vào phương trình đã cho ta được

$$\frac{2x+1}{x-1} = \frac{5(x-1)}{x+1} \quad (1)$$

ĐKXD: $x \neq \pm 1$.

$$\begin{aligned} (1) &\Rightarrow (2x+1)(x+1) = 5(x-1)^2 \\ &2x^2 + 2x + x + 1 = 5x^2 - 10x + 5 \\ &3x^2 - 13x + 4 = 0 \\ &(3x-1)(x-4) = 0 \\ &\begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ x = 4 \end{cases} \text{ (thỏa mãn ĐKXD).} \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = \frac{1}{3}$ và nghiệm nguyên $x = 4$. □

Dạng 5. Tìm giá trị của biến để giá trị của hai biểu thức có mối liên quan nào đó

❖ **Ví dụ 19.** Cho hai biểu thức $A = \frac{3}{3x+1} + \frac{2}{1-3x}$, $B = \frac{x-5}{9x^2-1}$ với giá trị nào của x thì hai biểu thức A và B có cùng một giá trị?

🗨 **Lời giải.**

$$A = B \Rightarrow \frac{3}{3x+1} + \frac{2}{1-3x} = \frac{x-5}{9x^2-1}. \quad (1)$$

ĐKXD: $x \neq \pm \frac{1}{3}$.

$$\begin{aligned} (1) &\Rightarrow \frac{3}{3x+1} - \frac{2}{3x-1} = \frac{x-5}{9x^2-1} \\ 3(3x-1) - 2(3x+1) &= x-5 \\ 9x-3-6x-2-x+5 &= 0 \\ 2x &= 0 \\ x &= 0 \text{ (thỏa mãn ĐKXD).} \end{aligned}$$

Vậy khi $x = 0$ thì $A = B$. □

❖ **Ví dụ 20.** Cho ba biểu thức $A = \frac{2}{5x-2}$; $B = \frac{4}{1-5x}$; $C = \frac{2}{(5x-2)(5x-1)}$.
Tìm các giá trị của x để tổng $A + B$ có giá trị bằng giá trị của biểu thức C .

🗨 **Lời giải.**

$$A + B = C \Rightarrow \frac{2}{5x-2} + \frac{4}{1-5x} = \frac{2}{(5x-2)(5x-1)} \quad (1)$$

ĐKXD: $x \neq \frac{2}{5}$; $x \neq \frac{1}{5}$.

$$\begin{aligned} (1) &\Rightarrow \frac{2}{5x-2} - \frac{4}{5x-1} = \frac{2}{(5x-2)(5x-1)} \\ 2(5x-1) - 4(5x-2) &= 2 \\ 10x-2-20x+8 &= 2 \\ -10x &= -4 \\ x &= \frac{2}{5} \text{ (loại).} \end{aligned}$$

Vậy không có giá trị nào của x để tổng $A + B$ có giá trị bằng giá trị của biểu thức C . □

❖ **Ví dụ 21.** Cho hai biểu thức $P = \frac{x-2}{x-1} + \frac{x+2}{x+1}$ và $Q = \frac{2-x^2}{1-x^2}$. Với giá trị nào của x thì giá trị của biểu thức P bằng 2 lần giá trị của biểu thức Q ?

🗨 **Lời giải.**

$$P = 2Q \Rightarrow \frac{x-2}{x-1} + \frac{x+2}{x+1} = \frac{2(2-x^2)}{1-x^2}. \quad (1)$$

ĐKXD: $x \neq \pm 1$.

$$\begin{aligned} (1) &\Rightarrow \frac{x-2}{x-1} + \frac{x+2}{x+1} = \frac{2(x^2-2)}{x^2-1} \\ (x-2)(x+1) + (x+2)(x-1) &= 2(x^2-2) \\ x^2-x-2+x^2+x-2 &= 2x^2-4 \\ 0x &= 0. \end{aligned}$$

Phương trình này nghiệm đúng với mọi x .

Vậy $P = 2Q$ với mọi giá trị của x trừ $x = \pm 1$. □



BÀI TẬP VẬN DỤNG

🔗 **Bài 1.** Giải các phương trình sau:

a) $x(x - 2) = 0$;

b) $(2x + 1)(3x - 2) = 0$;

c) $(x^2 - 4) + x(x - 2) = 0$;

d) $(2x + 1)^2 - 9x^2 = 0$.

💬 **Lời giải.**

a) $x(x - 2) = 0$

☑ $x = 0$

☑ $x - 2 = 0$ suy ra $x = 2$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = 0$ và $x = 2$.

b) $(2x + 1)(3x - 2) = 0$

☑ $2x + 1 = 0$ suy ra $x = -\frac{1}{2}$

☑ $3x - 2 = 0$ suy ra $x = \frac{2}{3}$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = -\frac{1}{2}$ và $x = \frac{2}{3}$.

c) Ta có

$$(x^2 - 4) + x(x - 2) = 0$$

$$(x - 2)(x + 2) + x(x - 2) = 0$$

$$(x - 2)(x + 2 + x) = 0$$

$$(x - 2)(2x + 2) = 0.$$

☑ $x - 2 = 0$ suy ra $x = 2$

☑ $2x + 2 = 0$ suy ra $x = -1$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = 2$ và $x = -1$.

d) Ta có

$$(2x + 1)^2 - 9x^2 = 0$$

$$(2x + 1)^2 - (3x)^2 = 0$$

$$(2x + 1 - 3x)(2x + 1 + 3x) = 0$$

$$(-x + 1)(5x + 1) = 0.$$

☑ $-x + 1 = 0$ suy ra $x = 1$

☑ $5x + 1 = 0$ suy ra $x = -\frac{1}{5}$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = 1$ và $x = -\frac{1}{5}$.

□

🔗 **Bài 2.** Giải các phương trình:

a) $5x(2x - 3) = 0$;

b) $(2x - 5)(3x + 6) = 0$;

$$c) \left(\frac{2}{3}x - 1\right)\left(\frac{1}{2}x + 3\right) = 0;$$

$$d) (2,5t - 7,5)(0,2t + 5) = 0.$$

Lời giải.

$$a) 5x(2x - 3) = 0$$

$$5x = 0 \text{ hoặc } 2x - 3 = 0$$

$$x = 0 \text{ hoặc } x = \frac{3}{2}.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = 0$ và $x = \frac{3}{2}$.

$$b) (2x - 5)(3x + 6) = 0$$

$$2x - 5 = 0 \text{ hoặc } 3x + 6 = 0$$

$$x = \frac{5}{2} \text{ hoặc } x = -2.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = \frac{5}{2}$ và $x = -2$.

$$c) \left(\frac{2}{3}x - 1\right)\left(\frac{1}{2}x + 3\right) = 0$$

$$\left(\frac{2}{3}x - 1\right) = 0 \text{ hoặc } \left(\frac{1}{2}x + 3\right) = 0$$

$$x = \frac{3}{2} \text{ hoặc } x = -6.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = \frac{3}{2}$ và $x = -6$.

$$d) (2,5t - 7,5)(0,2t + 5) = 0$$

$$2,5t - 7,5 = 0 \text{ hoặc } 0,2t + 5 = 0$$

$$t = 3 \text{ hoặc } t = -25.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $t = 3$ và $t = -25$.

□

Bài 3. Giải các phương trình

$$a) (9x - 4)(2x + 5) = 0;$$

$$b) (1,3x + 0,26)(0,2x - 4) = 0;$$

$$c) 2x(x + 3) - 5(x + 3) = 0;$$

$$d) x^2 - 4 + (x + 2)(2x - 1) = 0.$$

Lời giải.

a) Để giải phương trình đã cho, ta giải hai phương trình sau

$$\text{☑ } 9x - 4 = 0$$

$$x = \frac{4}{9};$$

$$\text{☑ } 2x + 5 = 0$$

$$x = \frac{-5}{2}.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = \frac{4}{9}$ và $x = \frac{-5}{2}$.

b) Để giải phương trình đã cho, ta giải hai phương trình sau

$$\text{☑ } 1,3x + 0,26 = 0$$

$$x = \frac{-1}{5};$$

$$\text{☑ } 0,2x - 4 = 0$$

$$x = 20.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = \frac{-1}{5}$ và $x = 20$.

$$c) 2x(x+3) - 5(x+3) = 0$$

$$(x+3)(2x-5) = 0.$$

Để giải phương trình trên, ta giải hai phương trình sau

$$\textcircled{+} x+3=0$$

$$x = -3;$$

$$\textcircled{+} 2x-5=0$$

$$x = \frac{5}{2}.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = -3$ và $x = \frac{5}{2}$.

$$d) x^2 - 4 + (x+2)(2x-1) = 0$$

$$x-2)(x+2) + (x+2)(2x-1) = 0$$

$$(x+2)(x-2+2x-1) = 0$$

$$(x+2)(3x-3) = 0$$

Để giải phương trình trên, ta giải hai phương trình sau

$$\textcircled{+} x+2=0$$

$$x = -2;$$

$$\textcircled{+} 3x-3=0$$

$$x = 1.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = -2$ và $x = 1$.

□

🔗 **Bài 4.** Giải các phương trình;

$$a) 3x(x-4) + 7(x-4) = 0$$

$$b) 5x(x+6) - 2x - 12 = 0$$

$$c) x^2 - x - (5x-5) = 0$$

$$d) (3x-2)^2 - (x+6)^2 = 0$$

💬 **Lời giải.**

$$a) \text{ Ta có: } 3x(x-4) + 7(x-4) = 0$$

$$(3x+7)(x-4) = 0$$

$$3x+7=0 \text{ hoặc } x-4=0$$

$$x = -\frac{7}{3} \text{ hoặc } x = 4.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = -\frac{7}{3}$ và $x = 4$.

$$b) \text{ Ta có: } 5x(x+6) - 2x - 12 = 0$$

$$5x(x+6) - 2(x+6) = 0$$

$$(5x-2)(x+6) = 0$$

$$5x-2=0 \text{ hoặc } x+6=0$$

$$x = \frac{2}{5} \text{ hoặc } x = -6.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = \frac{2}{5}$ và $x = -6$.

$$c) \text{ Ta có: } x^2 - x - (5x-5) = 0$$

$$x(x-1) - 5(x-1) = 0$$

$$(x-5)(x-1) = 0$$

$$x-5=0 \text{ hoặc } x-1=0$$

$$x = 5 \text{ hoặc } x = 1.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = 5$ và $x = 1$.

$$\begin{aligned}
 \text{d) Ta có: } (3x - 2)^2 - (x + 6)^2 &= 0 \\
 (3x - 2 + x + 6)(3x - 2 - x - 6) &= 0 \\
 (4x + 4)(2x - 8) &= 0 \\
 4x + 4 = 0 \text{ hoặc } 2x - 8 &= 0 \\
 x = -1 \text{ hoặc } x &= 4.
 \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = -1$ và $x = 4$.

□

❖ **Bài 5.** Giải các phương trình

$$\text{a) } \frac{1}{x} = \frac{5}{3(x+2)};$$

$$\text{b) } \frac{x}{2x-1} = \frac{x-2}{2x+5};$$

$$\text{c) } \frac{5x}{x-2} = 7 + \frac{10}{x-2};$$

$$\text{d) } \frac{x^2-6}{x} = x + \frac{3}{2}.$$

🗨 **Lời giải.**

a) Điều kiện xác định: $x \neq 0$ và $x \neq -2$.

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{x} &= \frac{5}{3(x+2)} \\
 \frac{3(x+2)}{3x(x+2)} &= \frac{5x}{3x(x+2)} \\
 3(x+2) &= 5x \\
 3x + 6 &= 5x \\
 2x &= 6 \\
 x &= 3.
 \end{aligned}$$

Ta thấy $x = 3$ thỏa mãn điều kiện xác định của phương trình.
 Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 3$.

b) Điều kiện xác định: $x \neq \frac{1}{2}$ và $x \neq \frac{-5}{2}$.

$$\begin{aligned}
 \frac{x}{2x-1} &= \frac{x-2}{2x+5} \\
 \frac{x(2x+5)}{(2x-1)(2x+5)} &= \frac{(x-2)(2x-1)}{(2x+5)(2x-1)} \\
 x(2x+5) &= (x-2)(2x-1) \\
 2x^2 + 5x &= 2x^2 - x - 4x + 2 \\
 10x &= 2 \\
 x &= \frac{1}{5}.
 \end{aligned}$$

Ta thấy $x = \frac{1}{5}$ thỏa mãn điều kiện xác định của phương trình.
 Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = \frac{1}{5}$.

c) Điều kiện xác định: $x \neq 2$.

$$\begin{aligned}
 \frac{5x}{x-2} &= 7 + \frac{10}{x-2} \\
 \frac{5x}{x-2} &= \frac{7(x-2)}{x-2} + \frac{10}{x-2} \\
 5x &= 7(x-2) + 10 \\
 5x &= 7x - 14 + 10 \\
 -2x &= -4 \\
 x &= 2.
 \end{aligned}$$

Ta thấy $x = 2$ không thỏa mãn điều kiện xác định của phương trình.
 Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

d) Điều kiện xác định: $x \neq 0$.

$$\begin{aligned}
 \frac{x^2 - 6}{x} &= x + \frac{3}{2} \\
 \frac{2(x^2 - 6)}{2x} &= \frac{2x^2}{2x} + \frac{3x}{2x} \\
 2(x^2 - 6) &= 2x^2 + 3x \\
 2x^2 - 12 &= 2x^2 + 3x \\
 3x &= -12 \\
 x &= -4.
 \end{aligned}$$

Ta thấy $x = -4$ thỏa mãn điều kiện xác định của phương trình.
 Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = -4$.

□

❖ **Bài 6.** Giải các phương trình sau:

a) $\frac{2}{2x+1} + \frac{1}{x+1} = \frac{3}{(2x+1)(x+1)};$

b) $\frac{1}{x+1} - \frac{x}{x^2-x+1} = \frac{3x}{x^3+1}.$

🗨 **Lời giải.**

a) Điều kiện xác định $x \neq -\frac{1}{2}$ và $x \neq -1$.
 Quy đồng mẫu và khử mẫu ta được

$$\begin{aligned}
 \frac{2(x+1) + (2x+1)}{(2x+1)(x+1)} &= \frac{3}{(2x+1)(x+1)} \\
 2(x+1) + (2x+1) &= 3 \\
 2x+2+2x+1 &= 3 \\
 4x &= 0 \\
 x &= 0.
 \end{aligned}$$

Giá trị $x = 0$ thỏa mãn ĐKXD. Vậy phương trình có nghiệm $x = 0$.

b) Điều kiện xác định $x \neq -1$.

Quy đồng mẫu và khử mẫu ta được

$$\begin{aligned}\frac{x^2 - x + 1 - x(x+1)}{(x+1)(x^2 - x + 1)} &= \frac{3x}{(x+1)(x^2 - x + 1)} \\ x^2 - x + 1 - x(x+1) &= 3x \\ x^2 - x + 1 - x^2 - x - 3x &= 0 \\ -5x + 1 &= 0 \\ x &= \frac{1}{5}.\end{aligned}$$

Giá trị $x = \frac{1}{5}$ thỏa mãn ĐKXD. Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = \frac{1}{5}$.



🔹 **Bài 7.** Giải các phương trình:

a) $\frac{x+5}{x-3} + 2 = \frac{2}{x-3}$

b) $\frac{3x+5}{x+1} + \frac{2}{x} = 3$

c) $\frac{x+3}{x-2} + \frac{x+2}{x-3} = 2$

d) $\frac{x+2}{x-2} - \frac{x-2}{x+2} = \frac{16}{x^2-4}$

🗨 **Lời giải.**

a) Điều kiện xác định: $x-3 \neq 0 \Rightarrow x \neq 3$.

Ta có:

$$\begin{aligned}\frac{x+5}{x-3} + 2 &= \frac{2}{x-3} \\ \frac{x+5}{x-3} + \frac{2(x-3)}{x-3} &= \frac{2}{x-3} \\ x+5+2(x-3) &= 2 \\ x+5+2x-6 &= 2 \\ 3x &= 3 \\ x &= 1 \text{ (thỏa mãn điều kiện xác định).}\end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = 1$.

b) Điều kiện xác định: $\begin{cases} x+1 \neq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq 0. \end{cases}$

Ta có:

$$\begin{aligned}\frac{3x+5}{x+1} + \frac{2}{x} &= 3 \\ \frac{(3x+5)x}{x(x+1)} + \frac{2(x+1)}{x(x+1)} &= \frac{3x(x+1)}{x(x+1)} \\ (3x+5)x + 2(x+1) &= 3x(x+1) \\ 3x^2 + 5x + 2x + 2 &= 3x^2 + 3x \\ 4x &= -2 \\ x &= \frac{-1}{2} \text{ (thỏa mãn điều kiện xác định).}\end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = \frac{-1}{2}$.

c) Điều kiện xác định: $\begin{cases} x-2 \neq 0 \\ x-3 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq 3. \end{cases}$

Ta có:

$$\begin{aligned}\frac{x+3}{x-2} + \frac{x+2}{x-3} &= 2 \\ \frac{(x+3)(x-3)}{(x-2)(x-3)} + \frac{(x+2)(x-2)}{(x-2)(x-3)} &= \frac{2(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-3)} \\ (x+3)(x-3) + (x+2)(x-2) &= 2(x-2)(x-3) \\ x^2 - 9 + x^2 - 4 &= 2(x^2 - 5x + 6) \\ x^2 - 9 + x^2 - 4 &= 2x^2 - 10x + 12 \\ 10x &= 25 \\ x &= \frac{5}{2} \text{ (thỏa mãn điều kiện xác định).}\end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = \frac{5}{2}$.

d) Điều kiện xác định: $\begin{cases} x-2 \neq 0 \\ x+2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq -2. \end{cases}$

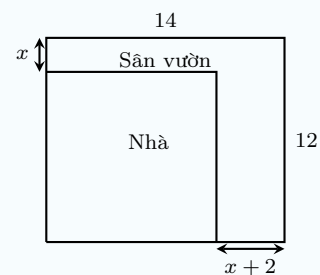
Ta có:

$$\begin{aligned}\frac{x+2}{x-2} - \frac{x-2}{x+2} &= \frac{16}{x^2-4} \\ \frac{(x+2)(x+2)}{(x-2)(x-2)} - \frac{(x-2)(x-2)}{(x+2)(x-2)} &= \frac{16}{(x+2)(x-2)} \\ (x+2)(x+2) - (x-2)(x-2) &= 16 \\ x^2 + 4x + 4 - x^2 + 4x - 4 &= 16 \\ 8x &= 16 \\ x &= 2 \text{ (thỏa mãn điều kiện xác định).}\end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = 2$.

❖ Bài 8.

Bác An có một mảnh đất hình chữ nhật với chiều dài 14 m và chiều rộng 12 m. Bác dự định xây nhà trên mảnh đất đó và dành một phần diện tích đất để làm sân vườn như hình bên. Biết diện tích đất làm nhà là 100 m^2 . Hỏi x bằng bao nhiêu mét?



☞ Lời giải.

Diện tích đất làm nhà là $(12 - x)[14 - (x + 2)] = (12 - x)(12 - x) \text{ (m}^2\text{)}$ với điều kiện $0 < x < 12$. Vì diện tích đất làm nhà là 100 m^2 nên ta có phương trình

$$\begin{aligned}(12 - x)(12 - x) &= 100 \\ (12 - x)^2 - 10^2 &= 0 \\ (12 - x - 10)(12 - x + 10) &= 0 \\ (2 - x)(22 - x) &= 0.\end{aligned}$$

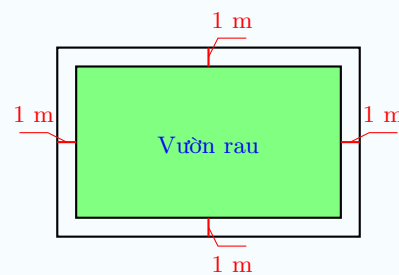
☑ $2 - x = 0$ suy ra $x = 2$

☑ $22 - x = 0$ suy ra $x = 22$ (loại).

Vậy x bằng 2 mét.

❖ Bài 9.

Một mảnh đất có dạng hình chữ nhật với chu vi bằng 52 m. Trên mảnh đất đó, người ta làm một vườn rau có dạng hình chữ nhật với diện tích là 112 m^2 và một lối đi xung quanh vườn rộng 1 m (Hình 2). Tính các kích thước của mảnh đất đó.



Hình 2

🗨️ Lời giải.

Nửa chu vi của hình chữ nhật là $52 : 2 = 26 \text{ (m)}$.

Gọi độ dài một cạnh của mảnh đất hình chữ nhật là $x \text{ (m)}$ ($x > 0$).

Suy ra độ dài cạnh còn lại là $26 - x \text{ (m)}$.

Do lối đi được là xung quanh vườn và rộng 1 m nên các kích thước của vườn rau lần lượt là $x - 2 \text{ m}$ và $26 - x - 2 = 24 - x \text{ m}$.

Theo đề bài, diện tích của vườn rau là 112 m^2 nên ta có phương trình $(x - 2)(24 - x) = 112$.

Giải phương trình

$$\begin{aligned}(x - 2)(24 - x) &= 112 \\ 24x - x^2 - 48 + 2x &= 112 \\ x^2 - 26x + 160 &= 0 \\ x^2 - 10x - 16x + 160 &= 0 \\ x(x - 10) - 16(x - 10) &= 0 \\ (x - 10)(x - 16) &= 0 \\ x - 10 = 0 \text{ hoặc } x - 16 &= 0 \\ x = 10 \text{ hoặc } x = 16.\end{aligned}$$

Với $x = 10$ thì độ dài cạnh còn lại là $26 - 10 = 16 \text{ m}$.

Với $x = 16$ thì độ dài cạnh còn lại là $26 - 16 = 10 \text{ m}$.

Vậy độ dài hai cạnh của mảnh đất là 10 m và 16 m. □

❖ Bài 10. Hai người cùng làm chung một công việc thì xong trong 8 giờ. Hai người cùng làm được 4 giờ thì người thứ nhất bị điều đi làm công việc khác. Người thứ hai tiếp tục làm việc trong 12 giờ nữa thì xong công việc. Gọi x là thời gian người thứ nhất làm một mình xong công việc (đơn vị tính là giờ, $x > 0$).

a) Hãy biểu thị theo x :

- ☑ Khối lượng công việc mà người thứ nhất làm được trong 1 giờ;
- ☑ Khối lượng công việc mà người thứ hai làm được trong 1 giờ.

b) Hãy lập phương trình theo x và giải phương trình đó. Sau đó cho biết, nếu làm một mình thì mỗi người phải làm trong bao lâu mới xong công việc đó.

🗨️ Lời giải.

a) Ta có

- ☑ Khối lượng công việc mà người thứ nhất làm được trong 1 giờ là $\frac{1}{x}$ (công việc).
- ☑ Khối lượng công việc mà người thứ hai làm được trong 1 giờ là $\frac{1}{8} - \frac{1}{x}$ (công việc).

b) Vì người thứ hai chỉ làm 4 giờ và người thứ nhất làm $4 + 12 = 16$ giờ nên ta có phương trình:

$$\begin{aligned} 16 \cdot \frac{1}{x} + 4 \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{x} \right) &= 1 \\ \frac{16}{x} + \frac{1}{2} - \frac{4}{x} &= 1 \\ \frac{12}{x} + \frac{1}{2} &= 1 \\ \frac{12 \cdot 2 + x}{2x} &= \frac{2x}{2x} \\ 24 + x &= 2x \\ x &= 24. \end{aligned}$$

Vậy nếu làm một mình thì người thứ nhất cần 24 giờ mới xong công việc đó.

Khi làm một mình thì trong 1 giờ, người thứ hai làm được $\frac{1}{8} - \frac{1}{24} = \frac{1}{12}$ công việc nên người thứ hai làm một mình cần 12 giờ mới xong công việc đó.

□

❖ **Bài 11.** Một ca nô đi xuôi dòng từ địa điểm A đến địa điểm B , rồi lại đi ngược dòng từ địa điểm B trở về địa điểm A . Thời gian cả đi và về là 3 giờ. Tính tốc độ của dòng nước. Biết tốc độ của ca nô khi nước yên lặng là 27km/h và độ dài quãng đường AB là 40 km.

🗨️ Lời giải.

Gọi tốc độ của dòng nước là x km/h ($0 < x < 27$).

Vận tốc của ca nô khi xuôi dòng là $27 + x$ (km/h).

Vận tốc của ca nô khi ngược dòng là $27 - x$ (km/h).

Thời gian ca nô xuôi dòng từ A đến B là $\frac{40}{27 + x}$ (giờ).

Thời gian ca nô ngược dòng từ B về A là $\frac{40}{27 - x}$ (giờ).

Vì thời gian cả đi và về là 3 giờ nên ta có phương trình

$$\begin{aligned} \frac{40}{27 + x} + \frac{40}{27 - x} &= 3 \\ \frac{40(27 - x)}{(27 + x)(27 - x)} + \frac{40(27 + x)}{(27 - x)(27 + x)} &= \frac{3(27 - x)(27 + x)}{(27 - x)(27 + x)} \\ 40(27 - x) + 40(27 + x) &= 3(27 - x)(27 + x) \\ 40(27 - x + 27 + x) &= 3(27^2 - x^2) \\ 40 \cdot 2 \cdot 27 &= 3 \cdot 27^2 - 3x^2 \\ 3x^2 &= 27 \\ x^2 &= 9 \\ x &= 3 \text{ hoặc } x = -3. \end{aligned}$$

Ta thấy $x = 3$ thỏa mãn điều kiện xác định; $x = -3$ không thỏa mãn điều kiện xác định.

Vận tốc độ của dòng nước là 3 km/h.

□

❖ **Bài 12.** Một doanh nghiệp sử dụng than để sản xuất sản phẩm. Doanh nghiệp đó lập kế hoạch tài chính cho việc loại bỏ chất ô nhiễm trong khí thải theo dự kiến sau: Để loại bỏ $p\%$ chất ô nhiễm trong khí thải thì chi phí C (triệu đồng) được tính theo công thức: $C = \frac{80}{100 - p}$ với $0 \leq p < 100$ (Nguồn: John W. Cell, Engineering Problems Illustrating Mathematics, McGraw-Hill Book Company, Inc. New York and London, năm 1943). Với chi phí là 420 triệu đồng thì doanh nghiệp loại bỏ được bao nhiêu phần trăm chất gây ô nhiễm trong khí thải (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

Lời giải.

Theo đề bài ta có phương trình

$$\begin{aligned}420 &= \frac{80}{100 - p} \\ \frac{420(100 - p)}{100 - p} &= \frac{80}{100 - p} \\ 420(100 - p) &= 80 \\ 42000 - 420p &= 80 \\ 420p &= 41920 \\ p &= \frac{41920}{420} \approx 99,8 \text{ (thỏa mãn } 0 \leq p < 100\text{)}.\end{aligned}$$

Vậy với 420 triệu đồng thì doanh nghiệp loại bỏ được 99,8% chất gây ô nhiễm trong khí thải. □

↔ **Bài 13.** Bạn Hoa dự định dùng hết số tiền 600 nghìn đồng để mua một số chiếc áo đồng giá tặng các bạn có hoàn cảnh khó khăn. Khi đến cửa hàng, loại áo mà bạn Hoa dự định mua được giảm giá 30 nghìn đồng/chiếc. Do vậy bạn Hoa đã mua được số lượng áo gấp 1,25 lần so với số lượng dự định. Tính giá tiền mỗi chiếc áo mà bạn Hoa đã mua.

Lời giải.

Gọi giá tiền ban đầu mỗi chiếc áo là x (nghìn đồng) ($x > 30$).

Số áo Hoa dự định mua được là $\frac{600}{x}$ (chiếc).

Số tiền mỗi chiếc áo sau khi giảm giá là $x - 30$ (nghìn đồng).

Số áo Hoa mua được sau khi giảm giá là $\frac{600}{x - 30}$ (chiếc).

Theo đề bài số áo thực tế mua được gấp $1,25 = \frac{5}{4}$ lần số áo dự định mua được. Do đó, ta có phương trình

$$\begin{aligned}\frac{600}{x - 30} &= \frac{5}{4} \cdot \frac{600}{x} \\ \frac{600 \cdot 4 \cdot x}{4x(x - 30)} &= \frac{5 \cdot 600 \cdot (x - 30)}{4x(x - 30)} \\ 2\,400x &= 3\,000(x - 30) \\ 2\,400x &= 3\,000x - 90\,000 \\ 600x &= 90\,000 \\ x &= 150 \text{ (thỏa mãn } x > 30\text{)}.\end{aligned}$$

Vậy giá tiền mỗi chiếc áo mà bạn Hoa đã mua là $150 - 30 = 120$ nghìn đồng. □

↔ **Bài 14.** Một người đi xe đạp từ A đến B cách nhau 60 km. Sau 1 giờ 40 phút, một xe máy cũng đi từ A đến B và đến B sớm hơn xe đạp 1 giờ. Tính tốc độ của mỗi xe, biết rằng tốc độ của xe máy gấp 3 lần tốc độ của xe đạp.

Lời giải.

Gọi tốc độ của xe đạp là x (km/h) ($x > 0$).

Vì tốc độ xe máy gấp 3 lần tốc độ xe đạp nên tốc độ xe máy là: $3x$ (km/h).

Thời gian người đi xe đạp từ A đến B là: $\frac{60}{x}$ (giờ).

Thời gian người đi xe máy từ A đến B là: $\frac{60}{3x}$ (giờ).

Vì người đi xe máy đến sớm hơn người đi xe đạp 1 giờ nên ta có phương trình:

$$\begin{aligned}
\frac{60}{x} - \frac{60}{3x} &= 1 + 1 + \frac{2}{3} \\
\frac{60}{x} - \frac{60}{3x} &= \frac{8}{3} \\
\frac{180}{3x} - \frac{60}{3x} &= \frac{8x}{3x} \\
180 - 60 &= 8x \\
8x &= 120 \\
x &= 15 \text{ (thỏa mãn điều kiện).}
\end{aligned}$$

Vậy tốc độ của người đi xe đạp là 15 (km/h), tốc độ của người đi xe máy là 45 (km/h). □

❖ **Bài 15.** Một xí nghiệp dự định chia đều 12 600 000 đồng để thưởng cho các công nhân tham gia hội thao nhân ngày thành lập xí nghiệp. Khi đến ngày hội thao chỉ có 80% số công nhân tham gia, vì thế mỗi người tham gia hội thao được nhận thêm 105 000 đồng. Tính số công nhân dự định tham gia lúc đầu.

🗨 **Lời giải.**

Gọi số công nhân dự định tham gia lúc đầu là x ($x \in \mathbb{N}^*$).

Số công nhân tham gia hội thao là: $0,8x$.

Số tiền dự định lúc đầu mỗi công nhân nhận được là: $\frac{12\,600\,000}{x}$ (đồng). Số tiền mỗi công nhân nhận được khi tham gia hội thao là: $\frac{12\,600\,000}{0,8x}$.

Vì mỗi công nhân tham gia hội thao được nhận thêm 105 000 đồng nên ta có phương trình:

$$\begin{aligned}
\frac{12\,600\,000}{0,8x} - \frac{12\,600\,000}{x} &= 105\,000 \\
\frac{12\,600\,000}{0,8x} - \frac{12\,600\,000 \cdot 0,8}{0,8x} &= \frac{105\,000 \cdot 0,8x}{0,8x} \\
12\,600\,000 - 10\,080\,000 &= 84\,000x \\
84\,000x &= 2\,520\,000 \\
x &= 30 \text{ (thỏa mãn điều kiện).}
\end{aligned}$$

Vậy số công nhân dự định tham gia lúc đầu là 30 công nhân. □

❖ **Bài 16.** Cho phương trình $\frac{1}{x+1} - \frac{2x^2-m}{x^3+1} = \frac{4}{x^2-x+1}$. Biết $x=0$ là một nghiệm của phương trình. Tìm các nghiệm còn lại.

🗨 **Lời giải.**

☑ Thay $x=0$ vào phương trình, ta được:

$$\frac{1}{1} - \frac{0-m}{0+1} = \frac{4}{0-0+1} \Rightarrow 1+m=4m=3.$$

☑ Thay $m=3$ vào phương trình ta được:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x+1} - \frac{2x^2-3}{x^3+1} &= \frac{4}{x^2-x+1} \quad (\text{ĐKXĐ } x \neq -1) \\
\Rightarrow x^2-x+1-2x^2+3 &= 4(x+1) \\
-x^2-5x &= 0 \\
\begin{cases} x=0 \\ x=-5 \end{cases} & \text{ (thỏa mãn ĐKXĐ).}
\end{aligned}$$

Vậy $x=-5$ là nghiệm còn lại của phương trình. □

🔗 **Bài 17.** Cho hai biểu thức $A = \frac{x+1}{2x-3}$; $B = \frac{3x}{x^2-4}$, với giá trị nào của x thì hai biểu thức A và B có cùng một giá trị?

💬 **Lời giải.**

$$A = B \Rightarrow \frac{x+1}{2x-3} = \frac{3x}{x^2-4}.$$

ĐKXD: $x \neq \pm 2$ và $x \neq \frac{3}{2}$. Biến đổi phương trình về dạng:

$$x^3 - 5x^2 + 5x - 4 = 0$$

$$x^3 - 4x^2 - x^2 + 4x + x - 4 = 0$$

$$(x-4)(x^2 - x + 1) = 0$$

$$x = 4 \text{ (thỏa mãn ĐKXD).}$$

Vậy $x = 4$ thì $A = B$. □

Bài 2

PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN, HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN



TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1 Phương trình bậc nhất hai ẩn

- ✓ Phương trình bậc nhất hai ẩn x, y là phương trình có dạng

$$ax + by = c,$$

trong đó a, b, c là các số đã biết (gọi là hệ số), a và b không đồng thời bằng 0.

- ✓ Nếu giá trị của vế trái tại $x = x_0$ và $y = y_0$ bằng vế phải thì cặp số $(x_0; y_0)$ được gọi là một nghiệm của phương trình.
Giải phương trình là tìm tất cả các nghiệm của phương trình đó.

- ⚠ *Mỗi nghiệm $(x_0; y_0)$ của phương trình $ax + by = c$ được biểu diễn bởi điểm có tọa độ $(x_0; y_0)$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy .*
- Phương trình bậc nhất hai ẩn $ax + by = c$ luôn luôn có vô số nghiệm. Tất cả các nghiệm của nó được biểu diễn bởi một đường thẳng.*

🔴 **Nhận xét.** Trong mặt phẳng tọa độ, tập hợp các điểm có tọa độ $(x; y)$ thỏa mãn phương trình bậc nhất hai ẩn $ax + by = c$ là một đường thẳng. Đường thẳng đó gọi là **đường thẳng $ax + by = c$** .

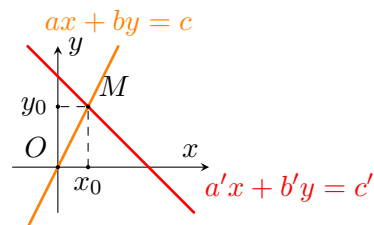
2 Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn

- ✓ Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn x, y có dạng: (I) $\begin{cases} ax + by = c & (1) \\ a'x + b'y = c' & (2) \end{cases}$

Trong đó, a, b, c, a', b', c' là các số đã biết (gọi là hệ số), a và b không đồng thời bằng 0, a' và b' không đồng thời bằng 0.

- ✓ Nếu $(x_0; y_0)$ là nghiệm chung của hai phương trình (1), (2) thì $(x_0; y_0)$ được gọi là một *nghiệm* của hệ (I).
Giải hệ phương trình là tìm tất cả các nghiệm của hệ phương trình đó.

- ⚠ *Cặp số $(x_0; y_0)$ là nghiệm của hệ phương trình (I) có nghĩa là điểm $M(x_0; y_0)$ vừa thuộc đường thẳng $d_1: ax + by = c$, vừa thuộc đường thẳng $d_2: a'x + b'y = c'$. Vậy M là giao điểm của hai đường thẳng d_1 và d_2 .*



CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1. Nhận biết phương trình, nghiệm của phương trình bậc nhất 2 ẩn

🔴 **Ví dụ 1.** Trong các hệ thức $4x + 3y = 5$; $0x + y = -1$; $0x + 0y = 3$, hệ thức nào là phương trình bậc nhất hai ẩn? Hệ thức nào không phải là phương trình bậc nhất hai ẩn?

Lời giải.

Cả ba hệ thức đều có dạng $ax + by = c$. Nhưng chỉ có hai hệ thức $4x + 3y = 5$ và $0x + y = -1$ thỏa mãn điều kiện $a \neq 0$ hoặc $b \neq 0$ nên là phương trình bậc nhất hai ẩn.

Hệ thức $0x + 0y = 3$ có $a = b = 0$, không thỏa mãn điều kiện trên nên hệ thức đó không phải là phương trình bậc nhất hai ẩn. $\square$

❖ **Ví dụ 2.** Trong các phương trình sau, phương trình nào là bậc nhất hai ẩn x, y ?

- a) $2x - y = 1$. b) $0x + 3y = 9$. c) $5x + 0y = -2$. d) $3x^2 - y = 7$.

Lời giải.

Phương trình ở các câu a, b, c là phương trình bậc nhất hai ẩn x, y . Phương trình ở câu d không phải là phương trình bậc nhất hai ẩn x, y $\square$

❖ **Ví dụ 3.** Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình bậc nhất hai ẩn? Xác định các hệ số a, b, c của phương trình bậc nhất hai ẩn đó.

- a) $3x + 5y = -3$. b) $0x - 2y = 5$. c) $-4x + 0y = 5$. d) $0x + 0y = 8$.

Lời giải.

- a) $3x + 5y = -3$ là phương trình bậc nhất hai ẩn với $a = 3, b = 5$ và $c = -3$.
 b) $0x - 2y = 5$ là phương trình bậc nhất hai ẩn với $a = 0, b = -2$ và $c = 5$.
 c) $-4x + 0y = 5$ là phương trình bậc nhất hai ẩn với $a = -4, b = 0$ và $c = 5$.
 d) $0x + 0y = 8$ không phải là phương trình bậc nhất hai ẩn vì $a = b = 0$. $\square$

❖ **Ví dụ 4.** Xác định hệ số a, b, c của mỗi phương trình bậc nhất hai ẩn sau:

- a) $x + 5y = -4$. b) $\sqrt{3}x + y = 0$. c) $0x - \frac{3}{2}y = 6$. d) $2x + 0y = -1,5$.

Lời giải.

- a) $x + 5y = -4$ là phương trình bậc nhất hai ẩn với $a = 1, b = 5$ và $c = -4$.
 b) $\sqrt{3}x + y = 0$ là phương trình bậc nhất hai ẩn với $a = \sqrt{3}, b = 1$ và $c = 0$.
 c) $0x - \frac{3}{2}y = 6$ là phương trình bậc nhất hai ẩn với $a = 0, b = -\frac{3}{2}$ và $c = 6$.
 d) $2x + 0y = -1,5$ là phương trình bậc nhất hai ẩn với $a = 2, b = 0$ và $c = -1,5$. $\square$

❖ **Ví dụ 5.** Hãy viết một phương trình bậc nhất hai ẩn và chỉ ra một nghiệm của nó.

Lời giải.

Phương trình bậc nhất hai ẩn $x - y = 3$. Cặp số $(4; 1)$ là một nghiệm của phương trình $x - y = 3$. $\square$

❖ **Ví dụ 6.** Cho phương trình $3x - y = 1$. Trong hai cặp số $(1; 2)$ và $(1; -2)$, cặp số nào là nghiệm của phương trình đã cho?

Lời giải.

- ☑ Cặp số $(1; 2)$ là nghiệm của phương trình đã cho vì $3 \cdot 1 - 2 = 1$.
 ☑ Cặp số $(1; -2)$ không phải là nghiệm của phương trình đã cho vì $3 \cdot 1 - (-2) = 5 \neq 1$. $\square$

❖ **Ví dụ 7.** Trong các cặp số sau, cặp số nào là nghiệm của phương trình $2x - 3y = 5$?

a) $(1; -1)$.

b) $(0; 5)$.

c) $(-2; -3)$.

🗨 **Lời giải.**

- a) Thay $x = 1; y = -1$, ta có $2 \cdot 1 - 3 \cdot (-1) = 5$.
 Vậy $(1; -1)$ là một nghiệm của phương trình đã cho.
- b) Thay $x = 0; y = 5$, ta có $2 \cdot 0 - 3 \cdot 5 = -15 \neq 5$.
 Vậy $(0; 5)$ không là nghiệm của phương trình đã cho.
- c) Thay $x = -2; y = -3$, ta có $2 \cdot (-2) - 3 \cdot (-3) = 5$.
 Vậy $(-2; -3)$ là một nghiệm của phương trình đã cho.

□

❖ **Ví dụ 8.** Cho phương trình $2x + y = 4$. Chứng minh rằng các cặp số $(2; 0), (0; 4)$ là nghiệm của phương trình trên.

🗨 **Lời giải.**

Do $2 \cdot 2 + 0 = 4$ là khẳng định đúng nên cặp số $(2; 0)$ là nghiệm của phương trình trên. Tương tự, cặp số $(0; 4)$ cũng là nghiệm của phương trình trên.

□

❖ **Ví dụ 9.** Trong các cặp số $(2; -1)$ và $(1; 0)$, cặp số nào là nghiệm của phương trình $4x + 3y = 5$?

🗨 **Lời giải.**

Cặp số $(2; -1)$ là một nghiệm của phương trình $4x + 3y = 5$, vì $4 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) = 5$.
 Cặp số $(1; 0)$ không là nghiệm của phương trình $4x + 3y = 5$, vì $4 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \neq 5$.

□

❖ **Ví dụ 10.** Xét xem cặp số $(2; -1)$ có là nghiệm của mỗi phương trình sau không?

a) $2x + 3y = 1$;

b) $2x - 3y = 1$;

c) $\frac{3}{2}x + 4y = -1$.

🗨 **Lời giải.**

- a) Thay $x = 2, y = -1$ vào phương trình $2x + 3y = 1$, ta được

$$2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) = 4 - 3 = 1.$$

Vậy cặp số $(2; -1)$ là nghiệm của phương trình $2x + 3y = 1$.

- b) Thay $x = 2, y = -1$ vào phương trình $2x - 3y = 1$, ta được

$$2 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) = 4 + 3 = 7 \neq 1.$$

Vậy cặp số $(2; -1)$ không là nghiệm của phương trình $2x - 3y = 1$.

- c) Thay $x = 2, y = -1$ vào phương trình $\frac{3}{2}x + 4y = -1$, ta được

$$\frac{3}{2} \cdot 2 + 4 \cdot (-1) = 3 - 4 = -1.$$

Vậy cặp số $(2; -1)$ là nghiệm của phương trình $\frac{3}{2}x + 4y = -1$.

□

❖ **Ví dụ 11.** Kiểm tra xem các cặp số $(3; -1)$, $(\sqrt{2}; 1 - \sqrt{2})$, $(81; -80)$, $(2; 1)$. Cặp số nào là nghiệm của phương trình $x + y = 1$.

💬 **Lời giải.**

Ta lần lượt xét:

- ☑ Thay $(3; -1)$ vào phương trình, ta được $3 + (-1) = 1 \Leftrightarrow 2 = 1$ (vô lý).
Vậy cặp $(3; -1)$ không là nghiệm của phương trình.
- ☑ Thay $(\sqrt{2}; 1 - \sqrt{2})$ vào phương trình, ta được $\sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} = 1$ (đúng).
Vậy cặp $(\sqrt{2}; 1 - \sqrt{2})$ là nghiệm của phương trình.
- ☑ Thay $(81; -80)$ vào phương trình, ta được $81 - 80 = 1$ (đúng).
Vậy cặp $(81; -80)$ là nghiệm của phương trình.
- ☑ Thay $(2; 1)$ vào phương trình, ta được $2 + 1 = 1 \Leftrightarrow 3 = 1$ (vô lý).
Vậy cặp $(2; 1)$ không là nghiệm của phương trình.

□

❖ **Ví dụ 12.** Cho phương trình $3x + 2y = 4$. (1)

- a) Trong hai cặp số $(1; 2)$ và $(2; -1)$, cặp số nào là nghiệm của phương trình (1).
- b) Tìm y_0 để cặp số $(4; y_0)$ là nghiệm của phương trình (1).
- c) Tìm thêm hai nghiệm của phương trình (1).

💬 **Lời giải.**

- a) Cặp số $(1; 2)$ không phải là nghiệm của phương trình (1) vì $3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 7 \neq 4$.
Cặp số $(2; -1)$ là nghiệm của phương trình (1) vì $3 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) = 4$.
- b) Vì cặp số $(4; y_0)$ là nghiệm của phương trình (1) nên

$$\begin{aligned} 3 \cdot 4 + 2 \cdot y_0 &= 4 \\ 12 + 2y_0 &= 4 \\ 2y_0 &= -8 \\ y_0 &= -4. \end{aligned}$$

Vậy $y_0 = -4$.

- c) Cặp số $(0; 2)$ là nghiệm của phương trình (1) vì $3 \cdot 0 + 2 \cdot 2 = 4$.
Cặp số $(-2; 5)$ là nghiệm của phương trình (1) vì $3 \cdot (-2) + 2 \cdot 5 = 4$.

□

❖ **Ví dụ 13.** Giả sử $(x; y)$ là nghiệm của phương trình bậc nhất hai ẩn $x + 2y = 5$.

- a) Hoàn thành bảng sau đây:

x	-2	-1	0	?	?
y	?	?	?	1	2

Từ đó suy ra 5 nghiệm của phương trình đã cho.

- b) Tính y theo x . Từ đó cho biết phương trình đã cho có bao nhiêu nghiệm

💬 **Lời giải.**

a) Ta có

x	-2	-1	0	3	1
y	$\frac{7}{2}$	3	$\frac{5}{2}$	1	2

Vậy 5 nghiệm của phương trình đã cho là: $\left(-2; \frac{7}{2}\right)$, $(-1; 3)$, $\left(0; \frac{5}{2}\right)$, $(3; 1)$, $(1; 2)$.

b) Ta có $y = \frac{5-x}{2}$. Với mỗi giá trị x tùy ý cho trước, ta luôn tìm được một giá trị y tương ứng. Do đó phương trình đã cho có vô số nghiệm.

□

❖ **Ví dụ 14.** Cô Hạnh có hai khoản đầu tư với lãi suất là 8% và 10% mỗi năm. Cô Hạnh thu được tiền lãi từ hai khoản đầu tư đó là 160 triệu đồng mỗi năm. Viết phương trình bậc nhất hai ẩn cho hai khoản đầu tư của cô Hạnh và chỉ ra ba nghiệm của phương trình đó.

💬 **Lời giải.**

Gọi x (triệu đồng) là khoản đầu tư với lãi suất là 8% mỗi năm ($x > 0$). Khi đó, tiền lãi thu được mỗi năm từ khoản đầu tư này là

$$8\% \cdot x = \frac{2x}{25} \text{ (triệu đồng).}$$

Gọi y (triệu đồng) là khoản đầu tư với lãi suất là 10% mỗi năm ($y > 0$). Khi đó, tiền lãi thu được mỗi năm từ khoản đầu tư này là

$$10\% \cdot y = \frac{y}{10} \text{ (triệu đồng).}$$

Ta có phương trình bậc nhất hai ẩn x, y cho hai khoản đầu tư của cô Hạnh là

$$\frac{2x}{25} + \frac{y}{10} = 160 \text{ hay } 4x + 5y = 8\,000.$$

Ba nghiệm của phương trình trên là $(100; 1\,520)$, $(500; 1\,200)$, $(1\,000; 800)$.

□

❖ **Ví dụ 15.** Hai bạn Dũng, Huy vào mua siêu thị mua vở và bút bi để ủng hộ các bạn học sinh vùng lũ lụt. Bạn Dũng mua 5 quyển vở và 3 chiếc bút bi với tổng số tiền phải trả là 39 000 đồng. Bạn Huy mua 6 quyển vở và 2 chiếc bút bi với tổng số tiền phải trả là 42 000 đồng. Giả sử giá của mỗi quyển vở là x đồng ($x > 0$), giá của mỗi chiếc bút bi là y đồng ($y > 0$).

a) Viết hai phương trình bậc nhất hai ẩn x, y lần lượt biểu thị tổng số tiền phải trả của bạn Dũng, bạn Huy.

b) Cặp số $(x; y) = (6\,000; 3\,000)$ có phải là nghiệm của từng phương trình bậc nhất đó hay không? Vì sao?

💬 **Lời giải.**

a) Hai phương trình tương ứng là $5x + 3y = 39\,000$ và $6x + 2y = 42\,000$.

b) Vì x, y đồng thời thỏa mãn cả hai phương trình nói trên nên ta nói cặp $(x; y) = (6\,000; 3\,000)$ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} 5x + 3y = 39\,000 \\ 6x + 2y = 42\,000 \end{cases}.$$

□

Dạng 2. Phương trình chứa tham số

💡 **Ví dụ 16.** Nếu cặp số $(1; -2)$ là một nghiệm của phương trình $x - y - m = 0$ thì m có giá trị là bao nhiêu?

💬 **Lời giải.**

Vì cặp số $(1; -2)$ là một nghiệm của phương trình nên

$$1 - (-2) - m = 0 \Leftrightarrow m = 3.$$

Vậy $m = 3$. □

💡 **Ví dụ 17.** Để $(2m; -3)$ là một nghiệm của phương trình $3x + 7y - 9 = 0$ thì m có giá trị là bao nhiêu?

💬 **Lời giải.**

Vì cặp số $(2m; -3)$ là một nghiệm của phương trình nên

$$3 \cdot 2m + 7 \cdot (-3) - 9 = 0 \Leftrightarrow 6m - 30 = 0 \Leftrightarrow m = 5.$$

Vậy $m = 5$. □

💡 **Ví dụ 18.** Tìm m trong mỗi trường hợp sau

- a) $(1; 2)$ là nghiệm của phương trình $mx + y - 5 = 0$;
- b) Điểm $A(0; 3)$ thuộc đường thẳng $4x + my - 6 = 0$.

💬 **Lời giải.**

- a) Thay $x = 1, y = 2$ vào phương trình ta có $m \cdot 1 + 2 - 5 = 0 \Leftrightarrow m = 3$.
- b) Thay $x = 0, y = 3$ vào đường thẳng, ta có $4 \cdot 0 + m \cdot 3 = 6 \Leftrightarrow m = 2$. □

💡 **Ví dụ 19.** Chứng minh rằng khi m thay đổi, các đường thẳng sau luôn đi qua một điểm cố định.

- a) $3x + m(y - 1) = 2$;
- b) $mx + (m - 2)y = m$.

💬 **Lời giải.**

- a) Giả sử $M(x_0; y_0)$ là điểm cố định mà đường thẳng luôn đi qua. Khi đó ta có

$$3x_0 + m(y_0 - 1) - 2 = 0 \forall m \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_0 - 2 = 0 \\ y_0 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{2}{3} \\ y_0 = 1 \end{cases}$$

Vậy $M\left(\frac{2}{3}; 1\right)$ là điểm cố định mà đường thẳng luôn đi qua khi m thay đổi.

- b) Giả sử $M(x_0; y_0)$ là điểm cố định mà đường thẳng luôn đi qua. Khi đó ta có

$$mx_0 + (m - 2)y_0 = m \forall m \Leftrightarrow (x_0 + y_0 - 1)m - 2y_0 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 + y_0 - 1 = 0 \\ -2y_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 0 \end{cases}$$

Vậy $M(1; 0)$ là điểm cố định mà đường thẳng luôn đi qua khi m thay đổi. □

Dạng 3. Tìm nghiệm tổng quát và vẽ đường thẳng biểu diễn tập nghiệm phương trình

 Tìm nghiệm tổng quát của phương trình $ax + by = c$:

-  Nếu $a \neq 0$ thì $x = \frac{c - by}{a}$ và viết công thức nghiệm tổng quát là $\begin{cases} x = \frac{c - by}{a} \\ y \in \mathbb{R}. \end{cases}$
-  Nếu $b \neq 0$ thì $y = \frac{c - ax}{b}$ và viết công thức nghiệm tổng quát là $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = \frac{c - ax}{b}. \end{cases}$

 Vẽ đường thẳng có phương trình $ax + by = c$:

-  Nếu $b \neq 0$ thì vẽ đường thẳng $y = \frac{1}{b} \cdot (c - ax)$.
-  Nếu $b = 0$ thì vẽ đường thẳng $x = \frac{c}{a}$ cùng phương với trục tung.

 **Ví dụ 20.** Tìm nghiệm tổng quát của mỗi phương trình sau và vẽ đường thẳng biểu diễn tập nghiệm của nó

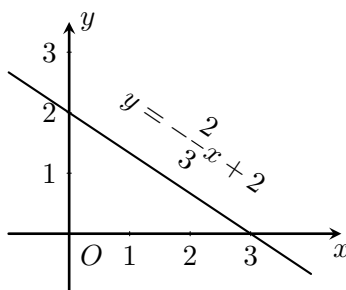
a) $2x + 3y = 6$;

b) $3x + 0 \cdot y = 2$.

 **Lời giải.**

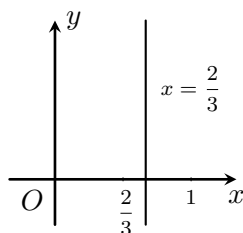
a) Ta có $2x + 3y = 6 \Leftrightarrow y = -\frac{2}{3}x + 2$. Do đó, nghiệm tổng quát của phương trình là $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = -\frac{2}{3}x + 2. \end{cases}$

Đồ thị:



b) Nghiệm tổng quát của phương trình là $\begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y \in \mathbb{R}. \end{cases}$

Đồ thị:



 **Ví dụ 21.** Viết nghiệm và biểu diễn hình học tất cả các nghiệm của mỗi phương trình bậc nhất hai ẩn sau:

a) $x + 2y = 3$;

b) $0x + y = -2$;

c) $x + 0y = 3$.

Lời giải.

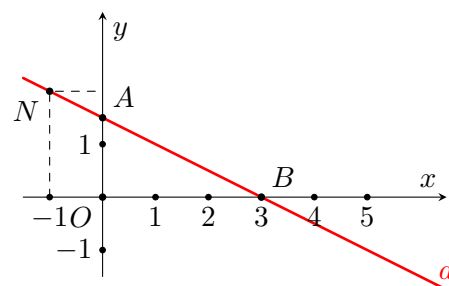
a) Xét phương trình $x + 2y = 3$. (1)

Ta viết (1) dưới dạng $y = -0,5x + 1,5$. Mỗi cặp số $(x; -0,5x + 1,5)$ với $x \in \mathbb{R}$ tùy ý, là một nghiệm của (1). Khi đó ta nói phương trình (1) có nghiệm (tổng quát) là:

$$(x; -0,5x + 1,5) \text{ với } x \in \mathbb{R} \text{ tùy ý.}$$

Mỗi nghiệm này là tọa độ của một điểm thuộc đường thẳng $y = -0,5x + 1,5$. Ta cũng gọi đường thẳng này là đường thẳng d : $x + 2y = 3$.

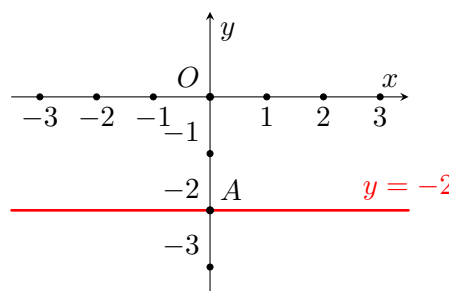
Để vẽ đường thẳng d , ta chỉ cần xác định hai điểm tùy ý của nó, chẳng hạn $A(0; 1,5)$ và $B(3; 0)$ rồi vẽ đường thẳng đi qua hai điểm đó.



b) Xét phương trình $0x + y = -2$. (2)

Ta viết gọn (2) thành $y = -2$. Phương trình (2) có nghiệm là $(x; -2)$ với $x \in \mathbb{R}$ tùy ý.

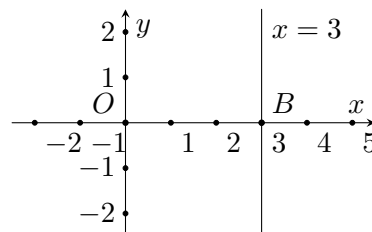
Mỗi nghiệm này là tọa độ của một điểm thuộc đường thẳng song song với trục hoành và cắt trục tung tại điểm $(0; -2)$. Ta gọi đó là đường thẳng $y = -2$.



c) Xét phương trình $x + 0y = 3$. (3)

Ta viết gọn (3) thành $x = 3$. Phương trình (3) có nghiệm là $(3; y)$ với $x \in \mathbb{R}$ tùy ý.

Mỗi nghiệm này là tọa độ của một điểm thuộc đường thẳng song song với trục tung và cắt trục hoành tại điểm $(3; 0)$. Ta gọi đó là đường thẳng $x = 3$ (H1.1c).



❖ **Ví dụ 22.** Viết nghiệm và biểu diễn hình học tất cả các nghiệm của mỗi phương trình bậc nhất hai ẩn sau:

a) $2x - 3y = 5$;

b) $0x + y = 3$;

c) $x + 0y = -2$.

Lời giải.

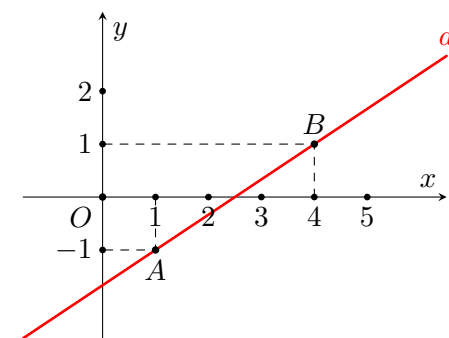
a) Xét phương trình $2x - 3y = 5$. (1)

Ta viết (1) dưới dạng $y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$. Mỗi cặp số $(x; \frac{2}{3}x - \frac{5}{3})$ với $x \in \mathbb{R}$ tùy ý, là một nghiệm của (1). Khi đó ta nói phương trình (1) có nghiệm (tổng quát) là:

$$(x; \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}) \text{ với } x \in \mathbb{R} \text{ tùy ý.}$$

Mỗi nghiệm này là tọa độ của một điểm thuộc đường thẳng $y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$. Ta cũng gọi đường thẳng này là đường thẳng d : $2x - 3y = 5$.

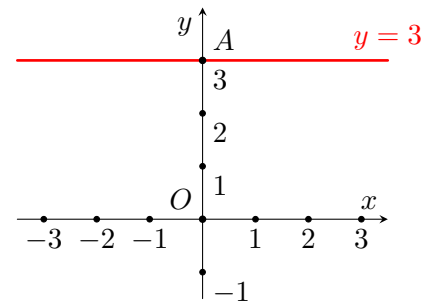
Để vẽ đường thẳng d , ta chỉ cần xác định hai điểm tùy ý của nó, chẳng hạn $A(1; -1)$ và $B(4; 1)$ rồi vẽ đường thẳng đi qua hai điểm đó.



b) Xét phương trình $0x + y = 3$. (2)

Ta viết gọn (2) thành $y = 3$. Phương trình (2) có nghiệm là $(x; 3)$ với $x \in \mathbb{R}$ tùy ý.

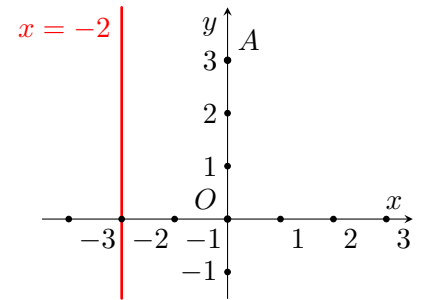
Mỗi nghiệm này là tọa độ của một điểm thuộc đường thẳng song song với trục hoành và cắt trục tung tại điểm $(0; 3)$. Ta gọi đó là đường thẳng $y = 3$



c) Xét phương trình $x + 0y = -2$. (3)

Ta viết gọn (3) thành $x = -2$. Phương trình (3) có nghiệm là $(-2; y)$ với $x \in \mathbb{R}$ tùy ý.

Mỗi nghiệm này là tọa độ của một điểm thuộc đường thẳng song song với trục tung và cắt trục hoành tại điểm $(-2; 0)$. Ta gọi đó là đường thẳng $x = -2$.



□

❖ **Ví dụ 23.** Cho phương trình $5x - 3y = 2$.

(1)

a) Tìm công thức nghiệm tổng quát của phương trình (1).

b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình.

🗨 **Lời giải.**

a) Ta tính y theo x

$$5x - 3y = 2 \Leftrightarrow 3y = 5x - 2 \Leftrightarrow y = \frac{5x - 2}{3}.$$

Phương trình có vô số nghiệm $\left(x; \frac{5x - 2}{3}\right)$, với x là một số thực tùy ý.

Ta cũng có thể viết nghiệm của phương trình là $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = \frac{5x - 2}{3} \end{cases}$.

b) Ta có $y = \frac{5x - 2}{3} = 2x - 1 + \frac{1 - x}{3}$.

Để $y \in \mathbb{Z}$ thì $\frac{1 - x}{3} \in \mathbb{Z}$.

Đặt $\frac{1 - x}{3} = t$ ($t \in \mathbb{Z}$) $\Rightarrow x = 1 - 3t$. Do đó

$$y = 2(1 - 3t) - 1 + t \Leftrightarrow y = 1 - 5t.$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là

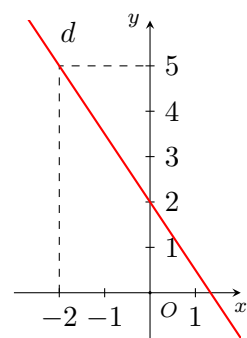
$$\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 1 - 5t \end{cases}, t \in \mathbb{Z}.$$

□

❖ **Ví dụ 24.** Cho phương trình $3x + 2y = 4$. (1) Hãy biểu diễn tất cả các nghiệm của phương trình (1) trên mặt phẳng tọa độ Oxy .

🗨 **Lời giải.**

Ta viết lại phương trình thành $y = \frac{-3}{2}x + 2$. Từ đó, tất cả các nghiệm của phương trình $3x + 2y = 4$ được biểu diễn bởi đường thẳng d đi qua hai điểm $(0; 2)$ và $(-2; 5)$.



❖ **Ví dụ 25.** Biểu diễn tất cả các nghiệm của phương trình sau trên mặt phẳng tọa độ Oxy .

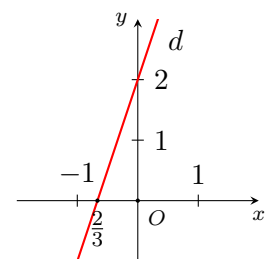
a) $-3x + y = 2$.

b) $0x + y = -2$.

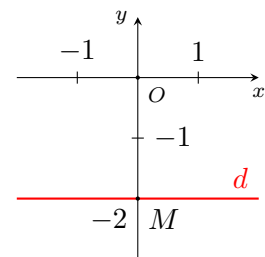
c) $2x + 0y = 3$.

🗨 **Lời giải.**

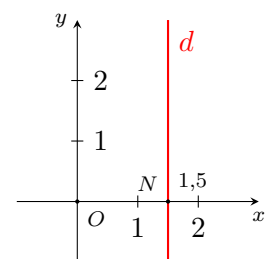
- a) Viết lại phương trình thành $y = 3x + 2$. Từ đó, tất cả các nghiệm của phương trình đã cho được biểu diễn bởi đường thẳng $d: y = 3x + 2$.



- b) Viết lại phương trình thành $y = -2$. Từ đó, tất cả các nghiệm của phương trình đã cho được biểu diễn bởi đường thẳng d vuông góc với Oy tại điểm $M(0; -2)$.



- c) Viết lại phương trình thành $x = 1,5$. Từ đó, tất cả các nghiệm của phương trình đã cho được biểu diễn bởi đường thẳng d vuông góc với Ox tại điểm $N(1,5; 0)$.



❖ **Ví dụ 26.** Tìm nghiệm nguyên của các phương trình:

a) $x - 3y = 4$.

b) $3x + y = 6$.

c) $4x - 5y = 8$.

🗨 **Lời giải.**

- a) Biến đổi phương trình về dạng $x = 3y + 4$.

Nhận xét rằng, với mọi $y \in \mathbb{Z}$, ta luôn có $x = 3y + 4 \in \mathbb{Z}$.

Vậy phương trình có vô số nghiệm nguyên thỏa mãn $(3y + 4; y)$ với $y \in \mathbb{Z}$.

- b) Biến đổi phương trình về dạng $y = -3x + 6$.

Nhận xét rằng, với mọi $x \in \mathbb{Z}$, ta luôn có $y = -3x + 6 \in \mathbb{Z}$.

Vậy phương trình có vô số nghiệm nguyên thỏa mãn $(x; -3x + 6)$ với $x \in \mathbb{Z}$.

- c) Biến đổi phương trình về dạng $4x = 5y + 8 \Leftrightarrow x = y + 2 + \frac{y}{4}$ (1).

Đặt $k = \frac{y}{4}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow y = 4k, k \in \mathbb{Z}$.

Thay $y = 4k$ vào (1) ta được $x = 4k + 2 + k = 5k + 2 \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy phương trình có vô số nghiệm nguyên thỏa mãn $(5k + 2; 4k)$ với $k \in \mathbb{Z}$. □

Dạng 4. Nhận biết hệ phương trình, nghiệm của hệ phương trình bậc nhất hai ẩn

❖ **Ví dụ 27.** Trong các hệ phương trình sau, hệ nào không phải là hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn, vì sao?

a) $\begin{cases} 2x = -6 \\ 5x + 4y = 1; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y = -3 \\ 0x + 0y = 1; \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ x + y = 3. \end{cases}$

💬 **Lời giải.**

Hệ phương trình b) không phải là hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn, vì phương trình thứ hai của hệ là $0x + 0y = 1$ không phải là phương trình bậc nhất hai ẩn. □

❖ **Ví dụ 28.** Trong những trường hợp sau, hãy chỉ ra các hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn:

a) $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ x + 3y = -11; \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 3x = -6; \end{cases}$

c) $\begin{cases} 9y = -27 \\ x + 3y = -11; \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 121 \\ x + 3y = -11. \end{cases}$

💬 **Lời giải.**

Hệ phương trình ở các câu a, b, c là hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn. Trường hợp ở câu d không phải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn. □

❖ **Ví dụ 29.** Trong các hệ phương trình sau, hệ phương trình nào là hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn?

a) $\begin{cases} x + 3y = 3 \\ 2x + y = -4. \end{cases}$

b) $\begin{cases} 0x + 0y = -5 \\ 2x + 7y = 3. \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + 0y = 0 \\ 0x - 3y = 1. \end{cases}$

💬 **Lời giải.**

a) Hệ phương trình $\begin{cases} x + 3y = 3 \\ 2x + y = -4 \end{cases}$ là hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn với $a = 1, b = 3, c = 3$ và $a' = 2, b' = 1, c' = -4$.

b) Hệ phương trình $\begin{cases} 0x + 0y = -5 \\ 2x + 7y = 3 \end{cases}$ không phải là hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn vì $a = b = 0$.

c) Hệ phương trình $\begin{cases} 2x + 0y = 0 \\ 0x - 3y = 1 \end{cases}$ là hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn với $a = 2, b = 0, c = 0$ và $a' = 0, b' = -3, c' = 1$. □

❖ **Ví dụ 30.** Trong các hệ phương trình sau, hệ phương trình nào là hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn?

a) $\begin{cases} x + 3y = 0 \\ 4x - 3y = -4. \end{cases}$

b) $\begin{cases} \sqrt{3}x + 0y = -5 \\ 0x + \frac{4}{5}y = 3. \end{cases}$

c) $\begin{cases} 7x + 2y = -5 \\ 0x + 0y = 9. \end{cases}$

💬 **Lời giải.**

a) Hệ phương trình $\begin{cases} x + 3y = 0 \\ 4x - 3y = -4 \end{cases}$ là hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn vì $a = 1, b = 3, c = 0$ và $a' = 4, b' = -3, c' = -4$.

b) Hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{3}x + 0y = -5 \\ 0x + \frac{4}{5}y = 3 \end{cases}$ là hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn vì $a = \sqrt{3}$, $b = 0$, $c = -5$ và $a' = 0$, $b' = \frac{4}{5}$, $c' = 3$.

c) Hệ phương trình $\begin{cases} 7x + 2y = -5 \\ 0x + 0y = 9 \end{cases}$ không phải là hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn vì $a' = b' = 0$.

❖ **Ví dụ 31.** Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + 5y = 10 \\ 2x - y = -13 \end{cases}$. Trong hai cặp số $(0; 2)$ và $(-5; 3)$, cặp số nào là nghiệm của hệ phương trình đã cho?

🗨 **Lời giải.**

Cặp số $(5; -3)$ là nghiệm của hệ phương trình vì $\begin{cases} -5 + 5 \cdot 3 = 10 \\ 2 \cdot (-5) - 3 = -13. \end{cases}$

Cặp số $(0; 2)$ không là nghiệm của hệ phương trình vì $\begin{cases} 0 + 2 \cdot 5 = 10 \\ 2 \cdot 0 - 2 = -2 (\neq -13). \end{cases}$

❖ **Ví dụ 32.** Cho hệ phương trình $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x - 3y = -1 \end{cases}$. Trong hai cặp số $(2; 1)$ và $(-1; 3)$, cặp số nào là nghiệm của hệ phương trình đã cho?

🗨 **Lời giải.**

Cặp số $(2; 1)$ là nghiệm của hệ phương trình vì $\begin{cases} 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 7 \\ 2 - 3 \cdot 1 = -1. \end{cases}$

Cặp số $(-1; 3)$ không là nghiệm của hệ phương trình vì $\begin{cases} 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 3 = 7 \\ -1 - 3 \cdot 3 = -10 (\neq -1). \end{cases}$

❖ **Ví dụ 33.** Cho hệ phương trình $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ x + 3y = -11. \end{cases}$

Trong các cặp số sau, cặp số nào là nghiệm của hệ phương trình đã cho?

a) $(-2; -3)$.

b) $(1; -1)$.

🗨 **Lời giải.**

a) Thay giá trị $x = -2$, $y = -3$ vào mỗi phương trình trong hệ ta có $2 \cdot (-2) - 3 \cdot (-3) = 5$, $-2 + 3 \cdot (-3) = -11$. Suy ra cặp số $(-2; -3)$ là nghiệm của từng phương trình trong hệ. Do đó cặp số $(-2; -3)$ là nghiệm của hệ phương trình đã cho.

b) Thay giá trị $x = 1$, $y = -1$ vào mỗi phương trình trong hệ ta có $2 \cdot 1 - 3 \cdot (-1) = 5$, $1 + 3 \cdot (-1) = -2 \neq -11$. Suy ra cặp số $(1; -1)$ không là nghiệm của phương trình thứ hai trong hệ. Do đó cặp số $(1; -1)$ không là nghiệm của hệ phương trình đã cho.

❖ **Ví dụ 34.** Cho hệ phương trình $\begin{cases} 2x - 5y = -2 \\ x + y = 6. \end{cases}$ Kiểm tra xem cặp số nào sau đây là nghiệm của hệ phương trình đã cho

a) $(3; 3)$.

b) $(4; 2)$.

🗨 **Lời giải.**

a) Thay giá trị $x = 3, y = 3$ vào mỗi phương trình trong hệ ta có

$$2 \cdot 3 - 5 \cdot 3 = -9 \neq 2.$$

Suy ra cặp số $(3; 3)$ không là nghiệm hệ phương trình đã cho.

b) Thay giá trị $x = 4, y = 2$ vào mỗi phương trình trong hệ ta có

$$2 \cdot 4 - 5 \cdot 2 = -2, 4 + 2 = 6.$$

Suy ra cặp số $(4; 2)$ là nghiệm của phương trình đã cho. □

❖ **Ví dụ 35.** Trong hai cặp số $(0; -2)$ và $(2; -1)$, cặp số nào là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ 4x + 3y = 5 \end{cases}$?

💬 **Lời giải.**

- ☑ Ta thấy khi $x = 0$ và $y = -2$ thì:
 $4x + 3y = 4 \cdot 0 + 3 \cdot (-2) = -6 \neq 5$ nên $(0; -2)$ không là nghiệm của phương trình thứ hai. Vậy $(0; -2)$ không là nghiệm của hệ phương trình đã cho.
- ☑ Ta thấy khi $x = 2$ và $y = -1$ thì:
 $x - 2y = 2 - 2 \cdot (-1) = 4$ nên $(2; -1)$ là nghiệm của phương trình thứ nhất;
 $4x + 3y = 4 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) = 5$ nên $(2; -1)$ là nghiệm của phương trình thứ hai.
 Vậy $(2; -1)$ là nghiệm chung của hai phương trình, nghĩa là $(2; -1)$ là một nghiệm của hệ phương trình đã cho. □

❖ **Ví dụ 36.** Giải thích tại sao cặp số $(1; 2)$ là một nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + y = 3. \end{cases}$

💬 **Lời giải.**

Ta thấy khi $x = 1$ và $y = 2$ thì:

- ☑ $2x - y = 2 \cdot 1 - 2 = 0$ nên $(1; 2)$ là nghiệm của phương trình thứ nhất;
- ☑ $x + y = 1 + 2 = 3$ nên $(1; 2)$ là nghiệm của phương trình thứ hai.

Vậy $(1; 2)$ là nghiệm chung của hai phương trình, nghĩa là $(1; 2)$ là một nghiệm của hệ phương trình đã cho. □

❖ **Ví dụ 37.** Xét bài toán cổ sau:

Quýt, cam mười bảy quả tươi
 Dem chia cho một trăm người cùng vui.
 Chia ba mỗi quả quýt rồi,
 Còn cam, mỗi quả chia mười vừa xinh.
 Trăm người, trăm miếng ngọt lành.
 Quýt, cam mỗi loại tính rành là bao?

Gọi x là số cam, y là số quýt cần tính ($x, y \in \mathbb{N}^*$), ta có hệ phương trình bậc nhất hai ẩn sau:

$$\begin{cases} x + y = 17 \\ 10x + 3y = 100 \end{cases}$$

Trong hai cặp số $(10; 7)$ và $(7; 10)$, cặp số nào là nghiệm của hệ phương trình trên? Từ đó cho biết một phương án về số cam và số quýt thỏa mãn yêu cầu của bài toán cổ.

💬 **Lời giải.**

- ☑ Ta thấy khi $x = 10$ và $y = 7$ thì:
 $10x + 3y = 10 \cdot 10 + 3 \cdot 7 = 121 \neq 100$ nên $(10; 7)$ không là nghiệm của phương trình thứ hai. Vậy $(10; 7)$ không là nghiệm của hệ phương trình đã cho.
- ☑ Ta thấy khi $x = 7$ và $y = 10$ thì:
 $x + y = 7 + 10 = 17$ nên $(7; 10)$ là nghiệm của phương trình thứ nhất;
 $10x + 3y = 10 \cdot 7 + 3 \cdot 10 = 100$ nên $(7; 10)$ là nghiệm của phương trình thứ hai.

Do đó $(7; 10)$ là nghiệm chung của hai phương trình, nghĩa là $(7; 10)$ là một nghiệm của hệ phương trình đã cho. Vậy nên chia 7 quả cam mỗi quả thành 10 phần bằng nhau và chia 10 quả quýt mỗi quả thành 3 phần bằng nhau thì thỏa mãn yêu cầu của bài toán. □

❖ **Ví dụ 38.** Đối với bài toán:

“Một đàn em nhỏ đứng bên sông
 To nhỏ bàn nhau chuyện chia hồng
 Mỗi người năm trái thừa năm trái
 Mỗi người sáu trái một người không
 Hỏi người bạn trẻ đang dừng bước
 Có mấy em thơ, mấy trái hồng?”

Làm thế nào để tính được số em nhỏ (em thơ) và số trái hồng?”

nếu gọi x là số em nhỏ, y là số quả hồng thì ta nhận được hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn nào?

🗨️ Lời giải.

Gọi x là số em nhỏ, y là số quả hồng.

Vì mỗi người 5 quả thì thừa 5 quả nên ta có: $5x + 5 = y$. (1)

Vì mỗi người 6 quả thì một người không có nên ta có: $(x - 1) \cdot 6 = y$. (2)

Từ (1), (2) ta được hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} 5x + 5 = y \\ (x - 1) \cdot 6 = y \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} 5x - y = 5 \\ 6x - y = 6. \end{cases}$$

□

📁 Dạng 5. Đoán nhận số nghiệm của hệ phương trình

Cho hệ phương trình (I) $\begin{cases} ax + by = c & (d) \\ a'x + b'y = c' & (d') \end{cases}$

- ☑ Dựa vào hệ số góc và tung độ góc để biết số nghiệm của hệ, với $a'b'c' \neq 0$.
- ☑ Nếu (d) cắt (d') thì hệ (I) có nghiệm duy nhất $\left(\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}\right)$.
- ☑ Nếu $(d) \parallel (d')$ thì hệ (I) vô nghiệm $\left(\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}\right)$.
- ☑ Nếu (d) trùng với (d') thì hệ (I) có vô số nghiệm $\left(\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}\right)$.

❖ **Ví dụ 39.** Không cần vẽ hình, hãy cho biết số nghiệm của mỗi hệ phương trình sau đây và giải thích vì sao?

a) $\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = -x + 1 \end{cases};$

b) $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ x - 2y = 2 \end{cases};$

c) $\begin{cases} x + y = 2 \\ 3x + 3y = 6 \end{cases}.$

🗨️ Lời giải.

- a) Vì $a \neq a'$ ($2 \neq -1$) nên hai đường thẳng đã cho cắt nhau.
Vậy hệ có nghiệm duy nhất.

- b) Ta có

$$\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ x - 2y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2} \\ y = \frac{1}{2}x - 1. \end{cases}$$

Vì $a \neq a'$ ($-\frac{3}{2} \neq \frac{1}{2}$) nên hai đường thẳng đã cho cắt nhau.
Vậy hệ có nghiệm duy nhất.

- c) Ta có

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 3x + 3y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x + 2 \\ y = -x + 2. \end{cases}$$

Vì $a = a'$ ($= -1$) và $c = c'$ ($= 2$) nên hai đường thẳng đã cho trùng nhau.
Vậy hệ có vô số nghiệm.

□

❖ **Ví dụ 40.** Không vẽ đồ thị, hãy đoán nhận số nghiệm các hệ phương trình sau

a) $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - y = 1; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y = 2 \\ -2x + 2y = 3; \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x = 3y \\ x + 5y = -4. \end{cases}$

🗨️ Lời giải.

- a) Ta có

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x + 1 \\ y = x - 1. \end{cases}$$

Vì $a \neq a'$ ($-2 \neq 1$) nên hai đường thẳng đã cho cắt nhau.
Vậy hệ có nghiệm duy nhất.

- b) Ta có

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ -2x + 2y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 2 \\ y = x + \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Vì $a = a'$ và $b \neq b'$ ($1 = 1; -2 \neq \frac{3}{2}$) nên hai đường thẳng đã cho song song.
Vậy hệ vô nghiệm.

- c) Ta có

$$\begin{cases} 2x = 3y \\ x + 5y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{2}{3}x \\ y = -\frac{x}{5} - \frac{4}{5}. \end{cases}$$

Vì $a \neq a'$ ($\frac{2}{3} \neq -\frac{1}{5}$) nên hai đường thẳng đã cho cắt nhau.
Vậy hệ có nghiệm duy nhất.

□



BÀI TẬP VẬN DỤNG

❖ **Bài 1.** Phương trình nào sau đây là phương trình bậc nhất hai ẩn, vì sao?

- a) $5x - 8y = 0$; b) $4x + 0y = -2$; c) $0x + 0y = 1$; d) $0x - 3y = 9$.

🗨 **Lời giải.**

Các phương trình $5x - 8y = 0$, $4x + 0y = -2$ và $0x - 3y = 9$ thỏa mãn điều kiện $a \neq 0$ hoặc $b \neq 0$ nên là phương trình bậc nhất hai ẩn. □

❖ **Bài 2.** Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình bậc nhất hai ẩn? Xác định các hệ số a , b , c của mỗi phương trình bậc nhất hai ẩn đó.

- a) $2x + 5y = -7$. b) $0x - 0y = 5$. c) $0x - \frac{5}{4}y = 3$. d) $0,2x + 0y = -1,5$.

🗨 **Lời giải.**

- a) $2x + 5y = -7$ là phương trình bậc nhất hai ẩn với $a = 2$, $b = 5$, $c = -7$.
 b) $0x - 0y = 5$ không phải là phương trình bậc nhất hai ẩn vì $a = b = 0$.
 c) $0x - \frac{5}{4}y = 3$ là phương trình bậc nhất hai ẩn với $a = 0$, $b = -\frac{5}{4}$, $c = 3$.
 d) $0,2x + 0y = -1,5$ là phương trình bậc nhất hai ẩn vì $a = 0,2$, $b = 0$, $c = -1,5$. □

❖ **Bài 3.** Trong các cặp số $(8; 1)$, $(-3; 6)$, $(4; -1)$, $(0; 2)$, cho biết cặp số nào là nghiệm của mỗi phương trình sau:

- a) $x - 2y = 6$; b) $x + y = 3$.

🗨 **Lời giải.**

- a) Thay cặp số $(x_0; y_0)$ vào phương trình $x - 2y = 6$ (1).

☑ Với $(8; 1) \Rightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 1 \end{cases}$ thay vào (1), ta có $8 - 2 \cdot 1 = 6$
 $\Rightarrow (8; 1)$ là một nghiệm của phương trình (1).

☑ Với $(-3; 6) \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 6 \end{cases}$ thay vào (1), ta có $-3 - 2 \cdot 6 = -15 \neq 6$
 $\Rightarrow (-3; 6)$ không là nghiệm của phương trình (1).

☑ Với $(4; -1) \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -1 \end{cases}$ thay vào (1), ta có $4 - 2 \cdot (-1) = 6$
 $\Rightarrow (4; -1)$ là một nghiệm của phương trình (1).

☑ Với $(0; 2) \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$ thay vào (1), ta có $0 - 2 \cdot 2 = -4 \neq 6$
 $\Rightarrow (0; 2)$ không là nghiệm của phương trình (1).

- b) Thay cặp số $(x_0; y_0)$ vào phương trình $x + y = 3$ (2).

☑ Với $(8; 1) \Rightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 1 \end{cases}$ thay vào (2), ta có $8 + 1 = 9 \neq 3$
 $\Rightarrow (8; 1)$ không là nghiệm của phương trình (2).

- ☑ Với $(-3; 6) \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 6 \end{cases}$ thay vào (2), ta có $-3 + 6 = 3$
 $\Rightarrow (-3; 6)$ là một nghiệm của phương trình (2).
- ☑ Với $(4; -1) \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -1 \end{cases}$ thay vào (2), ta có $4 + (-1) = 3$
 $\Rightarrow (4; -1)$ là một nghiệm của phương trình (2).
- ☑ Với $(0; 2) \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$ thay vào (2), ta có $0 + 2 = 2 \neq 3$
 $\Rightarrow (0; 2)$ không là nghiệm của phương trình (2).

□

🔗 **Bài 4.** Đường thẳng $2x - y = -4$ đi qua điểm nào trong các điểm sau:

$$A(2; 4), B\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; 4 + \sqrt{2}\right), C(1; -2), D\left(\frac{1}{\sqrt{3} - 2}; -2\sqrt{3}\right).$$

🗨 **Lời giải.**

Ta lần lượt xét:

- ☑ Thay $A(2; 4)$ vào phương trình, ta được $2 \cdot 2 - 4 = -4 \Leftrightarrow 0 = -4$ (vô lý).
 Vậy đường thẳng không đi qua điểm A .
- ☑ Thay $B\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; 4 + \sqrt{2}\right)$ vào phương trình, ta được
 $2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - (4 + \sqrt{2}) = -4 \Leftrightarrow -4 = -4$ (đúng).
 Vậy đường thẳng đi qua điểm B .
- ☑ Thay $C(1; -2)$ vào phương trình, ta được $2 \cdot 1 - (-2) = -4 \Leftrightarrow 4 = -4$ (vô lý).
 Vậy đường thẳng không đi qua điểm C .
- ☑ Thay $D\left(\frac{1}{\sqrt{3} - 2}; -2\sqrt{3}\right)$ vào phương trình, ta được
 $2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3} - 2} - (-2\sqrt{3}) = -4 \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{\sqrt{3} + 2}{-1} + 2\sqrt{3} = -4 \Leftrightarrow -4 = -4$ (đúng)
 Vậy đường thẳng đi qua điểm D .

□

🔗 **Bài 5.** Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x - 2y = 3 \end{cases}$. Trong các cặp số sau, cặp số nào là nghiệm của hệ phương trình đã cho?

a) $(3; -1);$

b) $(1; 0).$

🗨 **Lời giải.**

a) Thay giá trị $x = 3; y = -1$ vào mỗi phương trình trong hệ, ta có

- ☑ $3 + 2 \cdot (-1) = 1.$
- ☑ $3 \cdot 3 - 2 \cdot (-1) = 11.$

Suy ra cặp số $(3; -1)$ là nghiệm của phương trình thứ nhất mà không phải là nghiệm của phương trình thứ hai trong hệ.

Do đó cặp số $(3; -1)$ không phải là nghiệm của hệ phương trình đã cho.

b) Thay giá trị $x = 1; y = 0$ vào mỗi phương trình trong hệ, ta có

$$\textcircled{v} 1 + 2 \cdot 0 = 1.$$

$$\textcircled{v} 1 \cdot 3 - 2 \cdot 0 = 3.$$

Suy ra cặp số $(1; 0)$ là nghiệm của mỗi phương trình trong hệ.

Do đó cặp số $(1; 0)$ là nghiệm của hệ phương trình đã cho.

□

❖ **Bài 6.** Trong các cặp số $(1; 1)$, $(-2; 5)$, $(0; 2)$ cặp số nào là nghiệm của mỗi phương trình sau?

a) $4x + 3y = 7;$

b) $3x - 4y = -1.$

🗨 **Lời giải.**

a) Cặp số $(1; 1)$ là nghiệm của phương trình $4x + 3y = 7$ vì $4 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 7$.

Cặp số $(-2; 5)$ là nghiệm của phương trình $4x + 3y = 7$ vì $4 \cdot (-2) + 3 \cdot 5 = 7$.

Cặp số $(0; 2)$ không phải là nghiệm của phương trình $4x + 3y = 7$ vì

$$4 \cdot 0 + 3 \cdot 2 = 6 \neq 7.$$

b) Cặp số $(1; 1)$ là nghiệm của phương trình $3x - 4y = -1$ vì $3 \cdot 1 - 4 \cdot 1 = -1$.

Cặp số $(-2; 5)$ không phải là nghiệm của phương trình $3x - 4y = -1$ vì $3 \cdot (-2) - 4 \cdot 5 = -32 \neq -1$.

Cặp số $(0; 2)$ không phải là nghiệm của phương trình $3x - 4y = -1$ vì

$$3 \cdot 0 - 4 \cdot 2 = -8 \neq -1.$$

□

❖ **Bài 7.**

a) Tìm giá trị thích hợp thay cho dấu "?" trong bảng sau rồi cho biết 6 nghiệm của phương trình $2x - y = 1$:

x	-1	-0,5	0	0,5	1	2
$y = 2x - 1$	?	?	?	?	?	?

b) Viết nghiệm tổng quát của phương trình đã cho.

🗨 **Lời giải.**

a) Ta có bảng sau

x	-1	-0,5	0	0,5	1	2
$y = 2x - 1$	-3	-2	-1	0	1	3

Các nghiệm của phương trình $y = 2x - 1$ là $(-1; -3)$, $(-0,5; -2)$, $(0; -1)$, $(0,5; 0)$, $(1; 1)$ và $(2; 3)$.

b) Xét phương trình $2x - y = 1$. (1)

Ta viết (1) dưới dạng $y = 2x - 1$. Khi đó phương trình (1) có nghiệm (tổng quát) là:

$$(x; 2x - 1) \text{ với } x \in \mathbb{R} \text{ tùy ý.}$$

□

❖ **Bài 8.** Cặp số $(1; -3)$ là nghiệm của phương trình nào trong các phương trình sau?

a) $3x - 2y = -3;$

b) $3x + y = 0;$

c) $0 \cdot x - 3y = 9;$

d) $3x - y = 2.$

🗨 **Lời giải.**

Cặp số $(1; -3)$ là nghiệm của phương trình $3x + y = 0$ và $0 \cdot x - 3y = 9$.

□

🔗 **Bài 9.** Cho phương trình $mx + (m + 1)y = 3$.

- a) Với $m = 1$, xét xem các cặp số sau, cặp số nào là nghiệm của phương trình.
- i) $(3; -2)$; ii) $(0; 1)$; iii) $(-1; 0)$.
- b) Tìm nghiệm tổng quát của phương trình trên ứng với
- i) $m = -1$; ii) $m = 2$.
- c) Tìm giá trị m tương ứng khi phương trình nhận các cặp số sau làm nghiệm.
- i) $(3; 1)$; ii) $(2; 3)$.

Lời giải.

- a) Với $m = 1$, ta có phương trình $2x + 3y = 3$.
- i) Thay $x = 3, y = -2$ vào phương trình, ta có $2 \cdot 3 + 3 \cdot (-2) = 6 \neq 3$ nên $(3; -2)$ không là nghiệm của phương trình.
 - ii) Thay $x = 0, y = 1$ vào phương trình, ta có $2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 3$ nên $(0; 1)$ là nghiệm của phương trình.
 - iii) Thay $x = -1, y = 0$ vào phương trình, ta có $2 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 = -2 \neq 3$ nên $(-1; 0)$ không là nghiệm của phương trình.
- b) Tìm nghiệm tổng quát.
- i) Với $m = -1$ ta có phương trình $-1 \cdot x + (-1 + 1)y = 3 \Leftrightarrow x = -3$.
Vậy phương trình có nghiệm tổng quát $\begin{cases} x = -3 \\ y \in \mathbb{R}. \end{cases}$
 - ii) Với $m = 2$ ta có phương trình $2x + 3y = 3 \Leftrightarrow y = -\frac{2}{3}x + 1$.
Vậy phương trình có nghiệm tổng quát $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = -\frac{2}{3}x + 1. \end{cases}$
Hoặc: $2x + 3y = 3 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}y + \frac{3}{2}$.
Vậy phương trình có nghiệm tổng quát $\begin{cases} x = -\frac{3}{2}y + \frac{3}{2} \\ y \in \mathbb{R}. \end{cases}$
- c) Tìm giá trị m tương ứng khi phương trình nhận các cặp số sau làm nghiệm.
- i) Thay $x = 3, y = 1$ vào phương trình, ta có $3m + (m + 1) \cdot 1 = 3 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$.
 - ii) Thay $x = 2, y = 3$ vào phương trình, ta có $2m + (m + 1) \cdot 3 = 3 \Leftrightarrow m = 0$.

7

🔗 **Bài 10.** Cho các cặp số $(-2; 1)$, $(0; 2)$, $(1; 0)$, $(1, 5; 3)$, $(4; -3)$ và hai phương trình

$$5x + 4y = 8 \quad (1)$$

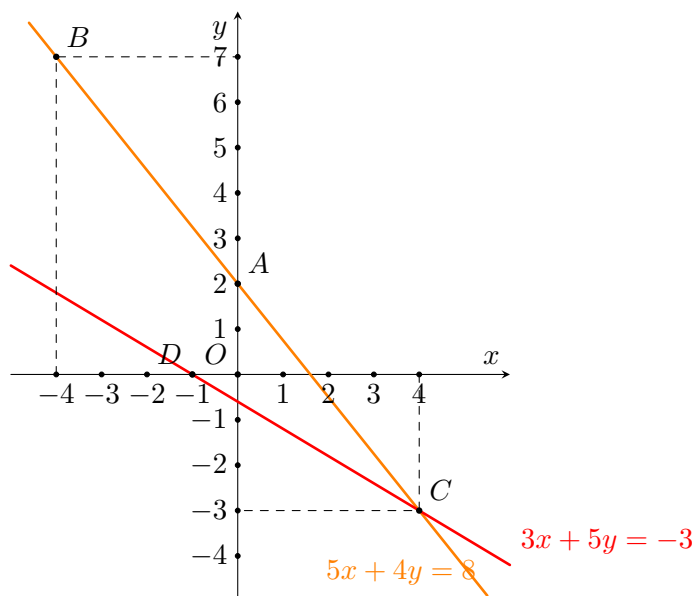
$$3x + 5y = -3 \quad (2)$$

Trong các cặp số đã cho:

- Những cặp số nào là nghiệm của phương trình (1)?
- Cặp số nào là nghiệm của hệ hai phương trình gồm (1) và (2)?
- Vẽ hai đường thẳng $5x + 4y = 8$ và $3x + 5y = -3$ trên cùng một mặt phẳng tọa độ để minh họa kết luận ở câu b.

Lời giải.

- a) Cặp số $(0; 2)$ là nghiệm của phương trình (1) vì $5 \cdot 0 + 4 \cdot 2 = 8$.
Cặp số $(4; -3)$ là nghiệm của phương trình (1) vì $5 \cdot 4 + 4 \cdot (-3) = 8$.
- b) Cặp số $(4; -3)$ là nghiệm của phương trình (2) vì $3 \cdot 4 + 5 \cdot (-3) = -3$.
Do đó cặp số $(4; -3)$ là nghiệm của hệ hai phương trình gồm (1) và (2).
- c) Để vẽ đường thẳng $5x + 4y = 8$, ta chỉ cần xác định hai điểm tùy ý của nó, chẳng hạn $A(0; 2)$ và $B(-4; 7)$ rồi vẽ đường thẳng đi qua hai điểm đó.
Để vẽ đường thẳng $3x + 5y = -3$, ta chỉ cần xác định hai điểm tùy ý của nó, chẳng hạn $C(4; -3)$ và $D(-1; 0)$ rồi vẽ đường thẳng đi qua hai điểm đó.



❖ **Bài 11.** Tìm m biết $(-1; -1)$ là một nghiệm của phương trình $(m - 1)x - (2m - 1)y = -1 - m$.

Lời giải.

$$m = -\frac{1}{2}$$

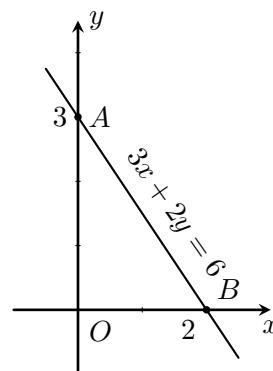
❖ **Bài 12.** Cho phương trình $3x + 2y = 6$ (1)

- a) Hãy biểu diễn tập nghiệm của phương trình (1) trên mặt phẳng tọa độ (gọi là (d)).
- b) Tính diện tích tam giác tạo bởi (d) với trục Ox và Oy .

Lời giải.

- a) Tập nghiệm của phương trình $3x + 2y = 6$ được biểu diễn như hình bên.
- b) Diện tích tam giác tạo bởi (d) với trục Ox và Oy

$$S = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 = 3 \text{ (đvdt)}.$$



◀ **Bài 13.** Viết nghiệm và biểu diễn hình học tất cả các nghiệm của mỗi phương trình bậc nhất hai ẩn sau:

a) $2x - y = 3;$

b) $0x + 2y = -4;$

c) $3x + 0y = 5.$

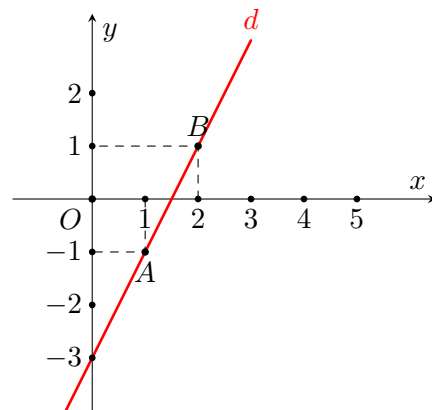
🗨 **Lời giải.**

a)

Xét phương trình $2x - y = 3$. (1)

Ta viết (1) dưới dạng $y = 2x - 3$. Mỗi cặp số $(x; 2x - 3)$ với $x \in \mathbb{R}$ tùy ý, là một nghiệm của (1). Khi đó ta nói phương trình (1) có nghiệm (tổng quát) là:

$$(x; 2x - 3) \text{ với } x \in \mathbb{R} \text{ tùy ý.}$$



Mỗi nghiệm này là tọa độ của một điểm thuộc đường thẳng $y = 2x - 3$. Ta cũng gọi đường thẳng này là đường thẳng $d: 2x - y = 3$.

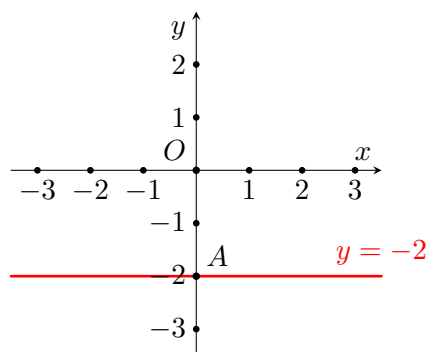
Để vẽ đường thẳng d , ta chỉ cần xác định hai điểm tùy ý của nó, chẳng hạn $A(1; -1)$ và $B(2; 1)$ rồi vẽ đường thẳng đi qua hai điểm đó.

b)

Xét phương trình $0x + 2y = -4$. (2)

Ta viết gọn (2) thành $y = -2$. Phương trình (2) có nghiệm là $(x; -2)$ với $x \in \mathbb{R}$ tùy ý.

Mỗi nghiệm này là tọa độ của một điểm thuộc đường thẳng song song với trục hoành và cắt trục tung tại điểm $(0; -2)$. Ta gọi đó là đường thẳng $y = -2$ (H1.4b).



c)

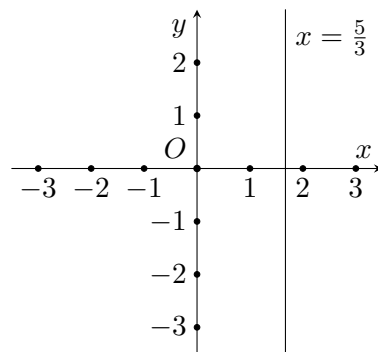
Xét phương trình $3x + 0y = 5$. (3)

Ta viết gọn (3) thành $x = \frac{5}{3}$. Phương trình (3) có nghiệm là $(\frac{5}{3}; y)$ với

$x \in \mathbb{R}$ tùy ý.

Mỗi nghiệm này là tọa độ của một điểm thuộc đường thẳng song song với trục tung và cắt trục hoành tại điểm $(\frac{5}{3}; 0)$. Ta gọi đó là đường thẳng

$$x = \frac{5}{3}.$$



◀ **Bài 14.** Cho phương trình $3x + 5y = 501$. Hỏi phương trình có bao nhiêu nghiệm nguyên dương?

🗨 **Lời giải.**

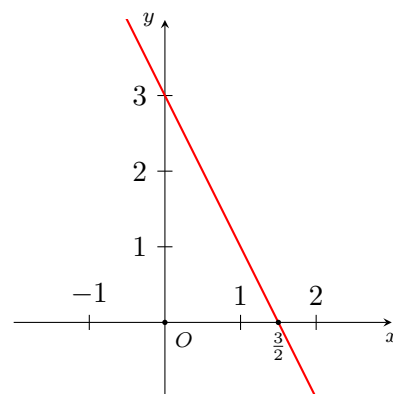
Phương trình có 33 nghiệm nguyên dương.

◀ **Bài 15.** Hãy biểu diễn tất cả các nghiệm của mỗi phương trình sau trên mặt phẳng tọa độ Oxy .

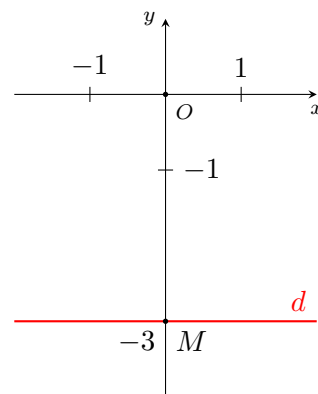
- a) $2x + y = 3$; b) $0x - y = 3$; c) $-3x + 0y = 2$; d) $-2x + y = 0$.

🗨 **Lời giải.**

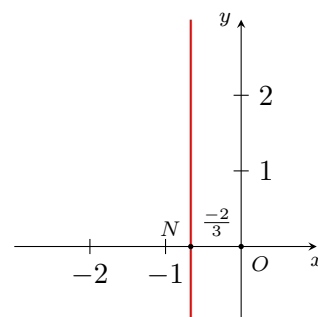
- a) Viết lại phương trình thành $y = -2x + 3$. Từ đó, tất cả các nghiệm của phương trình đã cho được biểu diễn bởi đường thẳng $d: y = -2x + 3$.



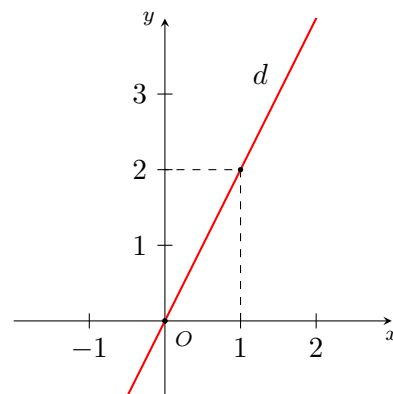
- b) Viết lại phương trình thành $y = -3$. Từ đó, tất cả các nghiệm của phương trình đã cho được biểu diễn bởi đường thẳng d vuông góc với Oy tại điểm $M(0; -3)$.



- c) Viết lại phương trình thành $x = -\frac{2}{3}$. Từ đó, tất cả các nghiệm của phương trình đã cho được biểu diễn bởi đường thẳng d vuông góc với Ox tại điểm $N(-\frac{2}{3}; 0)$.



- d) Viết lại phương trình thành $y = 2x$. Từ đó, tất cả các nghiệm của phương trình đã cho được biểu diễn bởi đường thẳng $d: y = 2x$.



◀ **Bài 16.** Tìm nghiệm nguyên của các phương trình sau:

- a) $2x + y = 4$ b) $x - 7y = 9$ c) $x - 2y = 3$ d) $3x - 2y = 4$ e) $3x + y = 8$

🗨 **Lời giải.**

- a) Biến đổi phương trình về dạng $y = -2x + 4$.
 Nhận xét rằng, với mọi $x \in \mathbb{Z}$, ta luôn có $y = -2x + 4 \in \mathbb{Z}$.
 Vậy phương trình có vô số nghiệm nguyên thỏa mãn $(x; -2x + 4)$ với $x \in \mathbb{Z}$.
- b) Biến đổi phương trình về dạng $x = 7y + 9$.
 Nhận xét rằng với mọi $y \in \mathbb{Z}$ ta luôn có $x = 7y + 9 \in \mathbb{Z}$.
 Vậy phương trình có vô số nghiệm nguyên thỏa mãn $(7y + 9; y)$ với $y \in \mathbb{Z}$.
- c) Biến đổi phương trình về dạng $x = 2y + 3$.
 Nhận xét rằng, với mọi $y \in \mathbb{Z}$, ta luôn có $x = 2y + 3 \in \mathbb{Z}$.
 Vậy phương trình có vô số nghiệm nguyên thỏa mãn $(2y + 3; y)$ với $y \in \mathbb{Z}$.
- d) Biến đổi phương trình về dạng $2y = 3x - 4 \Leftrightarrow y = -2 + x + \frac{1}{2}x$ (1).
 Đặt $k = \frac{1}{2}x, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 2k, k \in \mathbb{Z}$.
 Thay $x = 2k$ vào (1) ta được $y = -2 + 2k + k = -2 + 3k \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}$.
 Vậy phương trình có vô số nghiệm nguyên thỏa mãn $(2k; -2 + 3k)$, với $k \in \mathbb{Z}$.
- e) Biến đổi phương trình về dạng $y = -3x + 8$.
 Nhận xét rằng, với mọi $x \in \mathbb{Z}$, ta luôn có $y = -3x + 8 \in \mathbb{Z}$.
 Vậy phương trình đã cho có vô số nghiệm nguyên thỏa mãn $(x; -3x + 8)$, với $x \in \mathbb{Z}$.

❖ **Bài 17.** Chứng minh rằng khi m thay đổi, các đường thẳng sau luôn đi qua một điểm cố định.

a) $m(x - 5) - 2y = 6$;

b) $mx - 2y = 6$.

 Lời giải.

- a) Giả sử $M(x_0; u_0)$ là điểm cố định mà đường thẳng luôn đi qua. Khi đó ta có
- $$m(x_0 - 5) - 2y_0 = 6 \forall m \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 - 5 = 0 \\ -2y_0 - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 5 \\ y_0 = -3 \end{cases}.$$
- Vậy $M(5; -3)$ là điểm cố định mà đường thẳng luôn đi qua khi m thay đổi.
- b) Giả sử $M(x_0; y_0)$ là điểm cố định mà đường thẳng luôn đi qua. Khi đó ta có
- $$mx_0 - 2y_0 = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ -2y_0 - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = -3 \end{cases}.$$
- Vậy $M(0; -3)$ là điểm cố định mà đường thẳng luôn đi qua khi m thay đổi.

🔗 **Bài 18.** Cho hệ phương trình $\begin{cases} 4x - y = 2 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$. Cặp số nào dưới đây là nghiệm của hệ phương trình đã cho?

a) $(2; 2);$

b) $(1; 2);$

c) $(-1; -2)$.

Lời giải.

- a) Cặp số $(2; 2)$ không phải là nghiệm của hệ phương trình vì $\begin{cases} 4 \cdot 2 - 2 = 6 \neq 2 \\ 2 + 3 \cdot 2 = 8 \neq 7. \end{cases}$
- b) Cặp số $(1; 2)$ là nghiệm của hệ phương trình vì $\begin{cases} 4 \cdot 1 - 2 = 2 \\ 1 + 3 \cdot 2 = 7. \end{cases}$
- c) Cặp số $(-1; -2)$ không phải là nghiệm của hệ phương trình vì $\begin{cases} 4 \cdot (-1) - 2 = -6 \neq 2 \\ -1 + 3 \cdot (-2) = -7 \neq 7. \end{cases}$

Bài 19.

- a) Hệ phương trình $\begin{cases} 2x = -6 \\ 5x + 4y = 1 \end{cases}$ có là một hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn không, vì sao?
- b) Cặp số $(-3; 4)$ có là một nghiệm của hệ phương trình đó hay không, vì sao?

Lời giải.

- a) Các phương trình $2x + 0y = -6$ và $5x + 4y = 1$ thỏa mãn điều kiện $a \neq 0$ hoặc $b \neq 0$ nên là phương trình bậc nhất hai ẩn. Do đó hệ phương trình $\begin{cases} 2x = -6 \\ 5x + 4y = 1 \end{cases}$ là hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn.
- b) Ta thấy khi $x = -3$ và $y = 4$ thì:
 $2x = 2 \cdot (-3) = -6$ nên $(-3; 4)$ là nghiệm của phương trình thứ nhất;
 $5x + 4y = 5 \cdot (-3) + 4 \cdot 4 = 1$ nên $(-3; 4)$ là nghiệm của phương trình thứ hai.
 Vậy $(-3; 4)$ là nghiệm chung của hai phương trình, nghĩa là $(-3; 4)$ là một nghiệm của hệ phương trình đã cho.

□

Bài 20.

Cho hai đường thẳng $y = -\frac{1}{2}x + 2$ và $y = -2x - 1$.

- a) Vẽ hai đường thẳng đó trên cùng một hệ trục tọa độ.
- b) Xác định tọa độ giao điểm A của hai đường thẳng trên.
- c) Tọa độ của điểm A có là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x + y = -1 \end{cases}$ không? Tại sao?

Lời giải.

- a) Vẽ hai đường thẳng $y = -\frac{1}{2}x + 2$ và $y = -2x - 1$ trên cùng một hệ trục tọa độ.

Bảng giá trị của hàm số $y = -2x - 1$.

x	0	-1
$y = -2x - 1$	-1	1

Bảng giá trị của hàm số $y = -\frac{1}{2}x + 2$.

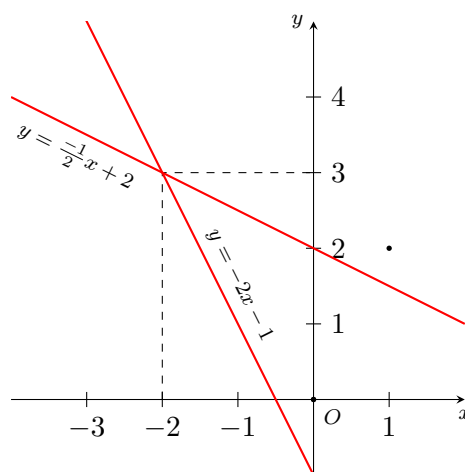
x	0	2
$y = -\frac{1}{2}x + 2$	2	1

Vẽ đồ thị

- b) Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng $y = -\frac{1}{2}x + 2$ và $y = -2x - 1$ là

$$\frac{1}{2}x + 2 = -2x - 1 \Leftrightarrow x = -2 \Rightarrow y = -2 \cdot (-2) - 1 = 3.$$

Vậy $(-2; 3)$ là tọa độ giao điểm của đường thẳng $y = -\frac{1}{2}x + 2$ và $y = -2x - 1$.



- c) Cặp số $(-2; 3)$ là nghiệm của hệ phương trình vì
$$\begin{cases} -2 + 2 \cdot 3 = 4 \\ 2 \cdot (-2) + 3 = -1. \end{cases}$$

□

❖ Bài 21.

Nhân dịp tết Trung thu, một doanh nghiệp dự định sản xuất hai loại bánh: bánh nướng và bánh dẻo. Lượng đường cần cho mỗi chiếc bánh nướng, bánh dẻo lần lượt là 60g và 50g. Gọi x và y lần lượt là số lượng bánh nướng và bánh dẻo mà doanh nghiệp dự định sản xuất để lượng đường sản xuất bánh là 500kg. Viết phương trình bậc nhất hai ẩn x, y và chỉ ra ba nghiệm của phương trình đó.



🗨️ Lời giải.

Ta có $500\text{kg} = 500\,000\text{g}$.

Lượng đường để doanh nghiệp sản xuất x cái bánh nướng là $60x$ (g).

Lượng đường để doanh nghiệp sản xuất y cái bánh dẻo là $50y$ (g).

Lượng đường để doanh nghiệp sản xuất cả hai loại bánh là 500 000 (g).

Do đó ta có phương trình

$$60x + 50y = 500\,000 \text{ hay } 6x + 5y = 50\,000. \quad (1)$$

- 🟢 Thay $x = 5000, y = 4000$ vào phương trình (1) ta có $6 \cdot 5000 + 5 \cdot 4000 = 50\,000$.
 $\Rightarrow (5000; 4000)$ là một nghiệm của phương trình (1).
- 🟢 Thay $x = 4000, y = 5200$ vào phương trình (1) ta có $6 \cdot 4000 + 5 \cdot 5200 = 50\,000$.
 $\Rightarrow (4000; 5200)$ là một nghiệm của phương trình (1).
- 🟢 Thay $x = 2500, y = 7000$ vào phương trình (1) ta có $6 \cdot 2500 + 5 \cdot 7000 = 50\,000$.
 $\Rightarrow (2500; 7000)$ là một nghiệm của phương trình (1).

□

❖ Bài 22. Năm bạn Châu, Hà, Khang, Minh, Phong cùng đi mua sticker để trang trí vở. Có hai loại sticker: loại I giá 2 nghìn đồng/chiếc và loại II giá 3 nghìn đồng/chiếc. Mỗi bạn mua 1 chiếc và tổng số tiền năm bạn phải trả là 12 nghìn đồng. Gọi x và y lần lượt là số sticker loại I và loại II mà năm bạn đã mua.

- a) Viết hệ phương trình bậc nhất hai ẩn x, y .
- b) Cặp số $(3; 2)$ có phải là nghiệm của hệ phương trình ở câu a hay không? Vì sao?

🗨️ Lời giải.

- a) Gọi x và y lần lượt là số sticker loại I và loại II mà năm bạn đã mua.

Do đó ta có phương trình $x + y = 5 \quad (1)$.

Số tiền trả cho sticker loại I là $2x$ nghìn đồng.

Số tiền trả cho sticker loại II là $3y$ nghìn đồng.

Do tổng số tiền năm bạn phải trả là 12 nghìn đồng nên ta có phương trình

$$2x + 3y = 12. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình bậc nhất hai ẩn

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 3y = 12. \end{cases}$$

- b) Thay giá trị $x = 3, y = 2$ vào hai phương trình trong hệ, ta có

☑ $3 + 2 = 5.$

☑ $2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 12.$

Suy ra cặp số $(3; 2)$ là nghiệm của cả hai phương trình trong hệ.

Do đó cặp số $(3; 2)$ là nghiệm của hệ phương trình trên.



🔗 **Bài 23.** Để chuẩn bị cho buổi liên hoan của gia đình, bác Ngọc mua hai loại thực phẩm là thịt lợn và cá chép. Giá tiền thịt lợn là 130 nghìn đồng/kg, giá tiền cá chép là 50 nghìn đồng/kg. Bác Ngọc đã chi 295 nghìn đồng để mua 3,5 kg hai loại thực phẩm trên. Gọi x và y lần lượt là số kilôgam thịt lợn và cá chép mà bác Ngọc đã mua.

a) Viết hệ phương trình bậc nhất hai ẩn x, y .

b) Cặp số $(1,5; 2)$ có phải là nghiệm của hệ phương trình ở câu a hay không? Vì sao?

🗨️ Lời giải.

a) Gọi x và y lần lượt là số kilôgam thịt lợn và cá chép mà bác Ngọc đã mua.
Do bác Ngọc mua 3,5 kg cả hai loại thịt lợn và cá chép nên ta có

$$x + y = 3,5. \quad (1)$$

Số tiền để mua x kg thịt lợn là $130x$ nghìn đồng.

Số tiền để mua y kg cá chép là $50y$ nghìn đồng.

Bác Ngọc đã chi 295 nghìn đồng để mua hai loại thực phẩm trên nên ta có

$$130x + 50y = 295 \text{ hay } 26x + 10y = 59. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y = 3,5 \\ 26x + 10y = 59. \end{cases}$$

b) Thay giá trị $x = 1,5, y = 2$ vào hai phương trình trong hệ, ta có

☑ $1,5 + 2 = 3,5.$

☑ $26 \cdot 1,5 + 10 \cdot 2 = 59.$

Suy ra cặp số $(1,5; 2)$ là nghiệm của cả hai phương trình trong hệ.

Do đó cặp số $(1,5; 2)$ là nghiệm của hệ phương trình trên.



🔗 **Bài 24.** Người ta cần sơn hai loại sản phẩm A, B bằng hai loại sơn: sơn xanh và sơn vàng. Lượng sơn để sơn mỗi loại sản phẩm được cho ở bảng (đơn vị: kg/1 sản phẩm).

Loại sản phẩm \ Loại sơn	Sơn xanh	Sơn vàng
	Sơn xanh	Sơn vàng
Sản phẩm loại A	0,6	0,3
Sản phẩm loại B	0,5	0,4

Người ta dự định sử dụng 85 kg sơn xanh và 50 kg sơn vàng để sơn tất cả sản phẩm của hai loại đó. Gọi x, y lần lượt là số sản phẩm loại A và số sản phẩm loại B được sơn.

a) Viết hệ phương trình bậc nhất hai ẩn x, y .

b) Cặp số $(100; 50)$ có phải là nghiệm của hệ phương trình ở câu a hay không? Vì sao?

🗨️ Lời giải.

- a) Gọi x, y lần lượt là số sản phẩm loại A và số sản phẩm loại B được sơn.
 Sơn x sản phẩm loại A cần: $0,6x$ kg sơn màu xanh và $0,3x$ kg sơn màu vàng.
 Sơn y sản phẩm loại B cần: $0,5y$ kg sơn màu xanh và $0,4y$ kg sơn màu vàng.
 Cần sử dụng 85 kg sơn xanh để sơn tất cả sản phẩm của hai loại nên ta có

$$0,6x + 0,5y = 85 \text{ hay } 6x + 5y = 850. \quad (1)$$

Cần sử dụng 50 kg sơn vàng để sơn tất cả sản phẩm của hai loại nên ta có

$$0,3x + 0,4y = 50 \text{ hay } 3x + 4y = 500. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 6x + 5y = 850 \\ 3x + 4y = 500. \end{cases}$$

- b) Thay giá trị $x = 100, y = 50$ vào hai phương trình trong hệ, ta có

$$\textcircled{v} 6 \cdot 100 + 5 \cdot 50 = 850.$$

$$\textcircled{v} 3 \cdot 100 + 4 \cdot 50 = 500.$$

Suy ra cặp số $(100; 50)$ là nghiệm của cả hai phương trình trong hệ.

Do đó cặp số $(100; 50)$ là nghiệm của hệ phương trình trên.

□

❖ **Bài 25.** Không vẽ đồ thị, hãy đoán nhận số nghiệm của các hệ phương trình sau

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \begin{cases} 4x + 3y = 5 \\ x + y = 1; \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} x - 2y = 5 \\ -2x + 4y = 3; \end{cases} & \text{c) } \begin{cases} 3x - y = 2 \\ -6x + 2y = -4; \end{cases} & \text{d) } \begin{cases} \frac{2}{3}x + \frac{3}{2}y = 5 \\ 2y = 8. \end{cases} \end{array}$$

💬 **Lời giải.**

$$\text{a) } \begin{cases} 4x + 3y = 5 \\ x + y = 1. \end{cases}$$

Do $\frac{4}{1} \neq \frac{3}{1}$ nên hệ có nghiệm duy nhất.

$$\text{b) } \begin{cases} x - 2y = 5 \\ -2x + 4y = 3. \end{cases}$$

Do $\frac{1}{-2} = \frac{-2}{4} \neq \frac{5}{3}$ nên hệ vô nghiệm.

$$\text{c) } \begin{cases} 3x - y = 2 \\ -6x + 2y = -4. \end{cases}$$

Do $\frac{3}{-6} = \frac{-1}{2} = \frac{2}{-4}$ nên hệ có vô số nghiệm.

$$\text{d) } \begin{cases} \frac{2}{3}x + \frac{3}{2}y = 5 \\ 2y = 8. \end{cases}$$

Do $\frac{0}{\frac{2}{3}} \neq \frac{2}{\frac{3}{2}}$ nên hệ có nghiệm duy nhất.

□

❖ **Bài 26.** Không vẽ đồ thị, hãy đoán số nghiệm của mỗi phương trình sau

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3x - y = 2; \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} 2 \cdot x + y \cdot 0 = 4 \\ 3x - y = 5; \end{cases} & \text{c) } \begin{cases} x - 2y = 4 \\ 2x - 4y = 5; \end{cases} & \text{d) } \begin{cases} 2x + y = 1 \\ x + \frac{y}{2} = \frac{1}{2}. \end{cases} \end{array}$$

💬 **Lời giải.**

a) Có một nghiệm duy nhất.

b) Có một nghiệm duy nhất.

c) Vô nghiệm.

d) Vô số nghiệm.

□

❖ **Bài 27.** Cho hệ phương trình $\begin{cases} 3x + ay = 5 \\ 2x + y = b \end{cases}$. Tìm a, b để hệ

- a) Có nghiệm duy nhất; b) Vô nghiệm; c) Vô số nghiệm.

🗨 **Lời giải.**

a) Hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \frac{3}{2} \neq \frac{a}{1} \Leftrightarrow a \neq \frac{3}{2}$.

b) Hệ vô nghiệm $\Leftrightarrow \frac{3}{2} = \frac{a}{1} \neq \frac{5}{b} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{2} = \frac{a}{1} \\ \frac{3}{2} \neq \frac{5}{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b \neq \frac{10}{3} \end{cases}$.

c) Hệ có vô số nghiệm $\Leftrightarrow \frac{3}{2} = \frac{a}{1} = \frac{5}{b} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{2} = \frac{a}{1} \\ \frac{3}{2} = \frac{5}{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = \frac{10}{3} \end{cases}$.

□

❖ **Bài 28.** Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$.

- a) Giải hệ phương trình bằng đồ thị.
b) Nghiệm của hệ có phải là nghiệm của phương trình $3x - 2y = -1$ hay không?

🗨 **Lời giải.**

a) Hệ có nghiệm duy nhất $(1; 2)$.

b) Nghiệm của hệ có là nghiệm của phương trình $3x - 2y = -1$.

□

❖ **Bài 29.** Xét hệ phương trình $\begin{cases} ax - y = b \\ a'x - y = b \end{cases}$.

- a) Chứng minh hệ đã cho luôn có nghiệm với mọi a, a', b .
b) Hệ đã cho có thể vô số nghiệm được không?

🗨 **Lời giải.**

a) Hai đồ thị của hai phương trình luôn cắt nhau tại $(0; -b)$ nên hệ đã cho luôn có nghiệm.

b) Hệ đã cho có thể có vô số nghiệm khi $a = a'$.

□

Bài 3

GIẢI HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN



TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

1 Phương pháp thế

Để giải hệ phương trình bằng phương pháp thế, ta thực hiện các bước như sau:

- ✓ **Bước 1:** Từ một phương trình của hệ, biểu diễn một ẩn theo ẩn kia rồi thế vào phương trình còn lại của hệ để được phương trình chỉ còn chứa một ẩn.
- ✓ **Bước 2:** Giải phương trình một ẩn vừa nhận được, từ đó suy ra nghiệm của hệ đã cho.

⚠ *Tùy theo hệ phương trình, ta có thể lựa chọn cách biểu diễn x theo y hoặc biểu diễn y theo x .*

2 Giải hệ phương trình bằng phương pháp cộng đại số

Để giải hệ phương trình bằng phương pháp cộng đại số, ta thực hiện các bước như sau:

- ✓ **Bước 1:** Nhân hai vế của mỗi phương trình với một số thích hợp (nếu cần) sao cho các hệ số của một ẩn nào đó trong hai phương trình của hệ bằng nhau hoặc đối nhau.
- ✓ **Bước 2:** Cộng hay trừ từng vế hai phương trình của hệ để được một phương trình một ẩn và giải phương trình đó.
- ✓ **Bước 3:** Thế giá trị của ẩn tìm được ở Bước 2 vào một trong hai phương trình của hệ đã cho để tìm giá trị của ẩn còn lại. Kết luận nghiệm của hệ.

⚠ *Trường hợp trong hệ phương trình đã cho không có hai hệ số của cùng một ẩn bằng nhau hay đối nhau, ta có thể đưa về trường hợp đã xét bằng cách nhân hai vế của mỗi phương trình với một số thích hợp (khác 0).*

3 Giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình

Để giải bài toán bằng cách lập hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn, ta thực hiện như sau:

- ✓ **Bước 1:** Lập hệ phương trình.
 - Chọn hai ẩn biểu thị hai đại lượng chưa biết và đặt điều kiện thích hợp cho các ẩn.
 - Biểu diễn các đại lượng liên quan theo các ẩn và các đại lượng đã biết.
 - Lập hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng.
- ✓ **Bước 2:** Giải hệ phương trình nhận được.
- ✓ **Bước 3:** Kiểm tra nghiệm tìm được ở Bước 2 có thoả mãn điều kiện của ẩn hay không, rồi trả lời bài toán.



CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1. Giải hệ phương trình bằng phương pháp thế

❖ **Ví dụ 1.** Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp thế

$$\text{a) } \begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 2y = 4 \end{cases};$$

$$\text{b) } \begin{cases} x - 3y = 2 \\ -2x + 5y = 1 \end{cases};$$

$$\text{c) } \begin{cases} 4x + y = -1 \\ 7x + 2y = -3 \end{cases};$$

$$\text{d) } \begin{cases} x - y = -2 \\ 2x - 2y = 8 \end{cases};$$

$$\text{e) } \begin{cases} -2x + y = 3 \\ 4x - 2y = -4 \end{cases};$$

$$\text{f) } \begin{cases} -x + y = -2 \\ 3x - 3y = 6 \end{cases};$$

$$\text{g) } \begin{cases} x + 3y = -1 \\ 3x + 9y = -3 \end{cases};$$

$$\text{h) } \begin{cases} 3x + y = 3 \\ -2x - 3y = 5 \end{cases}.$$

🗨 **Lời giải.**

$$\text{a) } \begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$

Từ phương trình thứ nhất của hệ ta có $y = 2x - 3$. Thế vào phương trình thứ hai của hệ, ta được $x + 2(2x - 3) = 4$ hay $5x - 6 = 4$, suy ra $x = 2$.

Từ đó $y = 2 \cdot 2 - 3 = 1$. Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(2; 1)$.

$$\text{b) } \begin{cases} x - 3y = 2 \\ -2x + 5y = 1 \end{cases};$$

Từ phương trình thứ nhất của hệ ta có $x = 2 + 3y$. Thế vào phương trình thứ hai của hệ, ta được: $-2(2 + 3y) + 5y = 1$ hay $-4 - y = 1$, suy ra $y = -5$.

Từ đó, $x = 2 + 3 \cdot (-5) = -13$. Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(-13; -5)$

$$\text{c) } \begin{cases} 4x + y = -1 \\ 7x + 2y = -3 \end{cases}.$$

Từ phương trình thứ nhất của hệ ta có: $y = -1 - 4x$. Thế vào phương trình thứ hai của hệ, ta được: $7x + 2(-1 - 4x) = -3$ hay $-x = -1$, suy ra $x = 1$.

Từ đó, $y = -1 - 4 \cdot (1) = -5$. Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(1; -5)$.

$$\text{d) } \begin{cases} x - y = -2 \\ 2x - 2y = 8 \end{cases}$$

Từ phương trình thứ nhất của hệ ta có: $y = x + 2$. Thế vào phương trình thứ hai của hệ, ta được: $2x - 2(x + 2) = 8$ hay $0x - 4 = 8$ (1).

Do không có giá trị nào của x thỏa mãn hệ thức (1) nên hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

$$\text{e) } \begin{cases} -2x + y = 3 \\ 4x - 2y = -4 \end{cases}$$

Từ phương trình thứ nhất của hệ ta có: $y = 2x + 3$. Thế vào phương trình thứ hai của hệ, ta được: $4x - 2(2x + 3) = -4$ hay $0x - 6 = -4$ (1).

Do không có giá trị nào của số x thỏa mãn hệ thức (1) nên hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

$$\text{f) } \begin{cases} -x + y = -2 \\ 3x - 3y = 6 \end{cases}$$

Từ phương trình thứ nhất của hệ ta có: $y = x - 2$. (1)

Thế vào phương trình thứ hai của hệ, ta được: $3x - 3(x - 2) = 6$ hay $0x + 6 = 6$ hay $0x = 0$. (2)

Ta thấy mọi giá trị của x đều thỏa mãn (2).

Với mỗi giá trị tùy ý của x , giá trị tương ứng của y được tính bởi (1).

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x; x - 2)$ với $x \in \mathbb{R}$ tùy ý.

$$\text{g) } \begin{cases} x + 3y = -1 \\ 3x + 9y = -3 \end{cases}$$

Từ phương trình thứ nhất của hệ ta có: $x = -1 - 3y$. (1)

Thế vào phương trình thứ hai của hệ, ta được: $3(-1 - 3y) + 9y = -3$ hay $0y - 3 = -3$ hay $0y = 0$. (2)

Ta thấy mọi giá trị của y đều thỏa mãn (2).

Với mỗi giá trị tùy ý của y , giá trị tương ứng của x được tính bởi (1).
 Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(-1 - 3y; y)$ với $y \in \mathbb{R}$ tùy ý.

$$\text{h) } \begin{cases} 3x + y = 3 & (1) \\ -2x - 3y = 5 & (2) \end{cases}$$

Từ phương trình (1), ta có $y = 3 - 3x$ (3).

Thay $y = 3 - 3x$ vào phương trình (2), ta được: $-2x - 3(3 - 3x) = 5$.

Giải phương trình này, ta được $x = 2$.

Thay $x = 2$ vào phương trình (3), ta được $y = -3$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $(2; -3)$.

□

❖ **Ví dụ 2.** Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp thế:

$$\text{a) } \begin{cases} 3x + 12y = -5 \\ x + 4y = 3 \end{cases};$$

$$\text{b) } \begin{cases} -2x + 4y = 5 \\ -x + 2y = 1 \end{cases};$$

$$\text{c) } \begin{cases} 12x - 4y = -16 \\ 3x - y = -4 \end{cases};$$

$$\text{d) } \begin{cases} x - 3y = 4 \\ -2x + 6y = -8 \end{cases};$$

$$\text{e) } \begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3x - 2y = 11 \end{cases};$$

$$\text{f) } \begin{cases} x - 3y = 2 \\ -2x + 5y = 1 \end{cases}.$$

🗨 **Lời giải.**

$$\text{a) Đặt } \begin{cases} 3x + 12y = -5 & (1) \\ x + 4y = 3 & (2) \end{cases}$$

Từ phương trình (2), ta có $x = 3 - 4y$.

Thay vào phương trình (1), ta được

$$\begin{aligned} 3 \cdot (3 - 4y) + 12y &= -5 \\ 9 - 12y + 12y &= -5 \\ 0y &= -14 \text{ (vô nghiệm)}. \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

$$\text{b) Đặt } \begin{cases} -2x + 4y = 5 & (1) \\ -x + 2y = 1 & (2) \end{cases}$$

(3) Từ phương trình (2), ta có $x = 2y - 1$.

Thay vào phương trình (1), ta được

$$\begin{aligned} -2 \cdot (2y - 1) + 4y &= 5 \\ -4y + 2 + 4y &= 5 \\ 0y &= 3 \text{ (vô nghiệm)}. \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

$$\text{c) Đặt } \begin{cases} 12x - 4y = -16 & (1) \\ 3x - y = -4 & (2) \end{cases}$$

Từ phương trình (2), ta có $y = 3x + 4$.

Thay vào phương trình (1), ta được

$$\begin{aligned} 12x - 4 \cdot (3x + 4) &= -16 \\ 12x - 12x - 16 &= -16 \\ 0x &= 0 \text{ (vô số nghiệm)}. \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có vô số nghiệm.

$$\text{d) Đặt } \begin{cases} x - 3y = 4 & (1) \\ -2x + 6y = -8 & (2) \end{cases}$$

(3) Từ phương trình (1), ta có $x = 3y + 4$.

Thay vào phương trình (2), ta được

$$\begin{aligned} -2 \cdot (3y + 4) + 6y &= -8 \\ -6y - 8 + 6y &= -8 \\ 0y &= 0 \text{ (vô số nghiệm)}. \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có vô số nghiệm.

e) Đặt $\begin{cases} 2x + y = 5 & (1) \\ 3x - 2y = 11 & (2) \end{cases}$
 Từ phương trình (1), ta có $y = 5 - 2x$.
 Thay vào phương trình (2), ta được

$$\begin{aligned} 3x - 2 \cdot (5 - 2x) &= 11 \\ 3x - 10 + 4x &= 11 \\ 7x &= 21 \\ x &= 3. \end{aligned}$$

Thay giá trị $x = 3$ vào phương trình (1), ta có

$$y = 5 - 2 \cdot 3 = -1.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = (3; -1)$.

f) Đặt $\begin{cases} x - 3y = 2 & (1) \\ -2x + 5y = 1 & (2) \end{cases}$
 Từ phương trình (1), ta có $x = 3y + 2$.
 Thay vào phương trình (2), ta được

$$\begin{aligned} -2 \cdot (3y + 2) + 5y &= 1 \\ -6y - 4 + 5y &= 1 \\ -y &= 5 \\ y &= -5. \end{aligned}$$

Thay giá trị $y = -5$ vào phương trình (1), ta có

$$x = 3 \cdot (-5) + 2 = -13.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = (-13; -5)$. □

❖ **Ví dụ 3.** Giải các phương trình sau bằng phương pháp thế

a) $\begin{cases} 5x\sqrt{3} + y = 2\sqrt{2} \\ x\sqrt{6} - y\sqrt{2} = 2; \end{cases}$

b) $\begin{cases} \sqrt{2} \cdot x - \sqrt{3} \cdot y = 1 \\ x + \sqrt{3} \cdot y = \sqrt{2}. \end{cases}$

🗨 **Lời giải.**

a) Từ phương trình thứ nhất của hệ ta có $y = 2\sqrt{2} - 5x\sqrt{3}$. Thay vào phương trình thứ hai ta được

$$x\sqrt{6} - (2\sqrt{2} - 5x\sqrt{3}) \cdot \sqrt{2} = 2 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

Từ đó $y = 2\sqrt{2} - 5 \cdot \frac{\sqrt{6}}{6} \cdot \sqrt{3} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất là $\left(\frac{\sqrt{6}}{6}; \frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$.

b) Từ phương trình thứ hai của hệ ta có $x = \sqrt{2} - \sqrt{3} \cdot y$. Thay vào phương trình thứ nhất ta được

$$\sqrt{2} \cdot (\sqrt{2} - \sqrt{3} \cdot y) - \sqrt{3}y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{3}}.$$

Từ đó $x = \sqrt{2} - \sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{3}} = 1$.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất là $\left(1; \frac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{3}}\right)$. □

📁 Dạng 2. Giải hệ phương trình bằng phương pháp cộng đại số

❖ **Ví dụ 4.** Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp cộng đại số:

a) $\begin{cases} -2x + 5y = 12 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases};$

b) $\begin{cases} 5x - 7y = 9 \\ 5x - 3y = 1 \end{cases};$

c) $\begin{cases} -4x + 3y = 0 \\ 4x - 5y = -8 \end{cases};$

d) $\begin{cases} 4x + 3y = 0 \\ x + 3y = 9 \end{cases};$

e) $\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 2x - 3y = -4 \end{cases};$

f) $\begin{cases} 4x + 3y = 6 \\ -5x + 2y = 4 \end{cases};$

g) $\begin{cases} 3x - 5y = 2 \\ -6x + 10y = -4 \end{cases};$

h) $\begin{cases} -0,5x + 0,5y = 1 \\ -2x + 2y = 8 \end{cases}.$

🗨 **Lời giải.**

- a) Cộng từng vế của hai phương trình ta được $8y = 16$, suy ra $y = 2$.
Thế $y = 2$ vào phương trình thứ hai ta được $2x + 3.2 = 4$, hay $2x = -2$, suy ra $x = -1$.
Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(-1; 2)$.
- b) Trừ từng vế của hai phương trình ta được $(5x - 5x) + (-7y + 3y) = 9 - 1$, hay $-4y = 8$, suy ra $y = -2$.
Thế $y = -2$ vào phương trình thứ nhất, ta được $5x - 7.(-2) = 9$ hay $5x + 14 = 9$, suy ra $x = -1$.
Vậy hệ phương trình có nghiệm $(-1; -2)$.
- c) Cộng từng vế của hai phương trình ta được $-2y = -8$, suy ra $y = 4$.
Thế $y = 4$ vào phương trình thứ nhất, ta được $-4x + 3.4 = 0$, hay $-4x = -12$, suy ra $x = 3$.
Vậy hệ phương trình có nghiệm $(3; 4)$.
- d) Trừ từng vế của hai phương trình, ta được $3x = -9$, suy ra $x = -3$.
Thế $x = -3$ vào phương trình thứ nhất, ta được $4.(-3) + 3y = 0$, hay $3y = 12$, suy ra $y = 4$.
Vậy hệ phương trình có nghiệm $(-3; 4)$.
- e) Nhân hai vế của phương trình thứ nhất với 3 và nhân hai vế của phương trình thứ 2, ta được:
- $$\begin{cases} 9x + 6y = 21 \\ 2x - 6y = -8 \end{cases}$$
- Cộng từng vế hai phương trình của hệ mới, ta được $13x = 13$ hay $x = 1$. Thế $x = 1$ vào phương trình thứ nhất của hệ đã cho, ta có $3.1 + 2y = 7$, suy ra $y = 2$.
Vậy nghiệm của hệ phương trình có nghiệm là $(1; 2)$.
- f) Nhân cả hai vế của phương trình thứ nhất cho 5 và nhân của hai vế của phương trình thứ hai cho 4 ta được
- $$\text{hệ } \begin{cases} 20x + 15y = 30 \\ -20x + 8y = 16 \end{cases}$$
- Cộng từng vế hai phương trình của hệ mới, ta được $23y = 46$, suy ra $y = 2$.
Thế $x = 2$ vào phương trình thứ nhất của hệ đã cho, ta có: $4x + 3.2 = 6$, hay $4x = 0$, suy ra $x = 0$.
Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(0; 2)$.
- g) Chia cả hai vế của phương trình thứ hai cho 2, ta được hệ $\begin{cases} 3x - 5y = 2 \\ -3x + 5y = -2 \end{cases}$.
Cộng từng vế hai phương trình của hệ mới ta được $0x + 0y = 0$. Hệ thức này luôn thỏa mãn với các giá trị tùy ý của x và y .
Với giá trị tùy ý của x , giá trị của y tính được nhờ hệ thức $3x - 5y = 2$, suy ra $y = \frac{3}{5}x - \frac{2}{5}$.
Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x; \frac{3}{5}x - \frac{2}{5})$ với $x \in \mathbb{R}$.
- h) Nhân cả hai vế của phương trình thứ nhất cho 4, ta được hệ $\begin{cases} -2x + 2y = 4 \\ -2x + 2y = 8 \end{cases}$.
Cộng từng vế của hai phương trình của hệ mới ta được $0x + 0y = 12$. Không tìm được bất kì giá trị x, y nào thỏa mãn hệ thức này.
Vậy hệ phương trình vô nghiệm.



❖ **Ví dụ 5.** Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp thế:

a) $\begin{cases} 3x + 6y = -9 \\ 3x + 4y = -5 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 5x + 2y = 7 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} 3x + 2y = 4 & (1) \\ -2x + 3y = -7 & (2) \end{cases}$.

🗨 **Lời giải.**

a) Đặt $\begin{cases} 3x + 6y = -9 & (1) \\ 3x + 4y = -5 & (2) \end{cases}$

Trừ từng vế hai phương trình (1) và (2), ta nhận được phương trình

$$2y = -4, \text{ tức là } y = -2.$$

Thế $y = -2$ vào phương trình (2), ta được phương trình

$$\begin{aligned} 3x + 4 \cdot (-2) &= -5 \\ 3x - 8 &= -5 \\ 3x &= 3 \\ x &= 1. \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = (1; -2)$.

b) Đặt $\begin{cases} 3x + 2y = 5 & (1) \\ 5x + 2y = 7 & (2) \end{cases}$

Trừ từng vế hai phương trình (1) và (2), ta nhận được phương trình

$$-2x = -2, \text{ tức là } x = 1.$$

Thế $x = 1$ vào phương trình (1), ta được phương trình

$$\begin{aligned} 3 \cdot 1 + 2y &= 5 \\ 3 + 2y &= 5 \\ 2y &= 2 \\ y &= 1. \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = (1; 1)$.

c) Đặt $\begin{cases} 3x + 2y = 4 & (1) \\ -2x + 3y = -7 & (2) \end{cases}$

Nhân hai vế của phương trình (1) với 2 và nhân hai vế của phương trình (2) với 3, ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} 6x + 4y = 8 & (3) \\ -6x + 9y = -21 & (4) \end{cases}$$

Cộng từng vế hai phương trình (3) và (4), ta nhận được phương trình

$$\begin{aligned} 13y &= -13 \\ y &= -1. \end{aligned}$$

Thế giá trị $y = -1$ vào phương trình (1), ta được phương trình:

$$\begin{aligned} 3x + 2 \cdot (-1) &= 4 \\ 3x - 2 &= 4 \\ 3x &= 6 \\ x &= 2. \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y) = (2; -1)$.

□

⇒ **Ví dụ 6.** Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} (\sqrt{3} + 1)x + (\sqrt{3} - 1)y = \sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} \cdot x - 2y = 3\sqrt{3} + 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x\sqrt{3} - y\sqrt{2} = 1 \\ x\sqrt{2} + y\sqrt{3} = \sqrt{3} \end{cases}$

🗨 **Lời giải.**

$$\begin{aligned} \text{a) } & \begin{cases} (\sqrt{3}+1)x + (\sqrt{3}-1)y = \sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} \cdot x - 2y = 3\sqrt{3} + 1 \end{cases} \\ & \begin{cases} (4+2\sqrt{3})x + 2y = 3 + \sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} \cdot x - 2y = 3\sqrt{3} + 1 \end{cases} \\ & \begin{cases} (4+4\sqrt{3})x = 4 + 4\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} \cdot x - 2y = 3\sqrt{3} + 1 \end{cases} \\ & \begin{cases} x = 1 \\ y = -\frac{\sqrt{3}+1}{2}; \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $\left(1; -\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)$.

$$\begin{aligned} \text{b) } & \begin{cases} x\sqrt{3} - y\sqrt{2} = 1 \\ x\sqrt{2} + y\sqrt{3} = \sqrt{3} \end{cases} \\ & \begin{cases} 3x - y\sqrt{6} = \sqrt{3} \\ 2x + y\sqrt{6} = \sqrt{6} \end{cases} \\ & \begin{cases} 5x = \sqrt{3} + \sqrt{6} \\ x\sqrt{2} + y\sqrt{3} = \sqrt{3} \end{cases} \\ & \begin{cases} x = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{6}}{5} \\ y = \frac{3 - \sqrt{2}}{5}. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất là $\left(\frac{\sqrt{3} + \sqrt{6}}{5}; \frac{3 - \sqrt{2}}{5}\right)$.

Dạng 3. Sử dụng MTCT để giải hệ phương trình

❖ **Ví dụ 7.** Tìm nghiệm của mỗi hệ phương trình sau bằng máy tính cầm tay:

$$\begin{aligned} \text{a) } & \begin{cases} 2x + 5y = -4 \\ -3x + y = -11 \end{cases}; & \text{b) } & \begin{cases} x - 3y = 2 \\ -2x + 5y = 1 \end{cases}; & \text{c) } & \begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ -6x + y = 3 \end{cases}. \end{aligned}$$

Lời giải.

a) Sử dụng loại máy tính phù hợp (chẳng hạn đối với CASIO FX570-VN PLUS), ấn liên tiếp các phím sau:

MODE **5** **1** **2** **=** **5** **=** **(-)** **4** **=** **(-)** **3** **=** **1** **=** **(-)** **1** **1** **=** **=**

Màn hình hiện ra kết quả như hình sau: $X = 3$

Ấn **=**, kết quả như hình sau: $Y = -2$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $(3; -2)$.

b) Sử dụng loại máy tính phù hợp (chẳng hạn đối với CASIO FX570-VN PLUS), ấn liên tiếp các phím sau:

MODE **5** **1** **1** **=** **-** **3** **=** **2** **=** **-** **2** **=** **5** **=** **1** **=** **=**

Ta thấy trên màn hình hiện ra $x = -13$.

Ấn tiếp phím **=** ta thấy trên màn hình hiện ra $y = -5$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x; y) = (-13; -5)$.

c) Sử dụng loại máy tính phù hợp (chẳng hạn đối với CASIO FX570-VN PLUS), ấn liên tiếp các phím sau:

MODE **5** **1** **3** **=** **-** **2** **=** **1** **=** **-** **6** **=** **1** **=** **3** **=** **=**

Ta thấy trên màn hình hiện ra $x = -\frac{7}{9}$.

Ấn tiếp phím **=** ta thấy trên màn hình hiện ra $y = -\frac{5}{3}$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x; y) = \left(-\frac{7}{9}; -\frac{5}{3}\right)$.

❖ **Ví dụ 8.** Dùng MTCT thích hợp để tìm nghiệm của các hệ phương trình sau

$$a) \begin{cases} 2x + 3y = -4 \\ -3x - 7y = 13; \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ -x - 1,5y = 1; \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 8x - 2y - 6 = 0 \\ 4x - y - 3 = 0. \end{cases}$$

🗨 **Lời giải.**

$$a) x = \frac{11}{5}; y = -\frac{14}{5}.$$

b) Hệ phương trình vô nghiệm.

c) Hệ phương trình vô số nghiệm.

□

❖ **Ví dụ 9.** Thực hiện lần lượt các yêu cầu sau để tính số mililit dung dịch acid HCl nồng độ 20% và số mililit dung dịch acid HCl nồng độ 5% cần dùng để pha chế 2 lít dung dịch acid HCl nồng độ 10%.

a) Gọi x là số mililit dung dịch acid HCl nồng độ 20%, y là số mililit dung dịch acid HCl nồng độ 5% cần lấy. Hãy biểu thị qua x và y

- ☑ Thể tích của dung dịch acid HCl 10% nhận được sau khi trộn lẫn hai dung dịch acid ban đầu.
- ☑ Tổng số gam acid HCl nguyên chất có trong hai dung dịch acid này.

b) Sử dụng kết quả ở câu a, hãy lập một hệ hai phương trình bậc nhất với hai ẩn là x, y .
Dùng MTCT giải hệ phương trình này để tính số mililit cần lấy của mỗi dung dịch acid HCl ở trên.

🗨 **Lời giải.**

a) Thể tích của dung dịch acid HCl 10% nhận được sau khi trộn lẫn hai dung dịch acid ban đầu là $x + y$.
Tổng số gam acid HCl nguyên chất có trong hai dung dịch acid là $20\%x + 5\%y$

b) Theo câu a, ta có hệ
$$\begin{cases} x + y = 2000 \\ 20\%x + 5\%y = 2000 \cdot 10\% \end{cases}$$

Ta có $x = \frac{2000}{9}$ và $y = \frac{16000}{9}$ nên thể tích dung dịch HCl 10% ban đầu là $\frac{2000}{9}$ (ml) và thể tích dung dịch HCl 5% ban đầu là $\frac{16000}{9}$ (ml).

□

📁 Dạng 4. Giải hệ bằng phương pháp đặt ẩn phụ

❖ **Ví dụ 10.** Giải các hệ phương trình

$$a) \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2 \\ \frac{3}{x} - \frac{4}{y} = -1; \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \frac{6}{x-1} - \frac{5}{y-2} = 7 \\ \frac{3}{x-1} + \frac{2}{y-2} = -1 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} \frac{3}{2x-y} - \frac{6}{x+y} = -1 \\ \frac{1}{2x-y} - \frac{1}{x+y} = 0; \end{cases}$$

🗨 **Lời giải.**

a) Điều kiện $x \neq 0; y \neq 0$.

Đặt $\frac{1}{x} = u; \frac{1}{y} = v$, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} u + v = 2 \\ 3u - 4v = -1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} v = 2 - u \\ 3u - 4(2 - u) = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v = 2 - u \\ u = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = 1 \\ v = 1. \end{cases}$$

Trở lại ẩn x, y ta có $\begin{cases} \frac{1}{x} = 1 \\ \frac{1}{y} = 1 \end{cases}$, do đó $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1. \end{cases}$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(1; 1)$.

b) Điều kiện $\begin{cases} x \neq 1 \\ y \neq 2 \end{cases} \quad (*)$

Đặt $u = \frac{1}{x-1}; v = \frac{1}{y-2}$, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 6u - 5v = 7 \\ 3u + 2v = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6u - 5v = 7 \\ 6u + 4v = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6u - 5v = 7 \\ 9v = -9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = 2 \\ v = -1 \end{cases}$$

Khi $\begin{cases} u = 2 \\ v = -1 \end{cases}$ suy ra $\begin{cases} \frac{1}{x-1} = 2 \\ \frac{1}{y-2} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-1 = \frac{1}{2} \\ y-2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = 1 \end{cases}$

So sánh với điều kiện $(*)$ thấy thỏa mãn. Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(\frac{3}{2}; 1\right)$.

c) Điều kiện $y \neq 2x; y \neq -x$.

Đặt $\frac{1}{2x-y} = u, \frac{1}{x+y} = v$, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 3u - 6v = -1 \\ u - v = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = \frac{1}{3} \\ v = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Trở lại ẩn x, y ta có $\begin{cases} \frac{x}{x+1} = 5 \\ \frac{x}{y-3} = 2 \end{cases}$, do đó $\begin{cases} x = -\frac{5}{4} \\ y = 6. \end{cases}$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $\left(-\frac{5}{4}; 6\right)$.

□

Dạng 5. Xác định đường thẳng, giao điểm giữa các đường thẳng

◀ Ví dụ 11. Xác định a, b để đồ thị hàm số $y = ax + b$ đi qua hai điểm:

a) $A(2; -2)$ và $B(-1; 3)$;

b) $A(2; 1)$ và $B(1; 2)$;

c) $A(3; -6)$ và $B(-2; 4)$.

🗨️ Lời giải.

a) Vì đồ thị hàm số $y = ax + b$ đi qua điểm $A(2; -2)$ nên ta có phương trình sau $2a + b = -2$ (1).

Vì đồ thị hàm số $y = ax + b$ đi qua điểm $B(-1; 3)$. nên ta có phương trình sau $-a + b = 3$ (2).

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} 2a + b = -2 \\ -a + b = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a = -5 \\ -a + b = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -\frac{5}{3} \\ b = 3 + a \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -\frac{5}{3} \\ b = \frac{4}{3}. \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $\left(-\frac{5}{3}; \frac{4}{3}\right)$.

Vậy khi $a = -\frac{5}{3}$, $b = \frac{4}{3}$ thì đồ thị hàm số $y = ax + b$ đi qua hai điểm $A(2; -2)$ và $B(-1; 3)$.

b) Hai điểm $A(2; 1)$ và $B(1; 2)$ thuộc đường thẳng $y = ax + b$ nên ta có hệ phương trình ẩn a, b là

$$\begin{cases} 2a + b = 1 \\ a + b = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -1 \\ a + b = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = 3. \end{cases}$$

Vậy với $a = -1$; $b = 3$ thì đồ thị $y = ax + b$ đi qua $A(2; 1)$ và $B(1; 2)$.

c) Hai điểm $A(3; -6)$ và $B(-2; 4)$ thuộc đường thẳng $y = ax + b$ nên ta có hệ phương trình ẩn a, b là

$$\begin{cases} 3a + b = -6 \\ -2a + b = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5a = -10 \\ -2a + b = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -2 \\ b = 0. \end{cases}$$

Vậy với $a = -2$; $b = 0$ thì đồ thị $y = ax + b$ đi qua $A(3; -6)$ và $B(-2; 4)$. □

◀ Ví dụ 12. Xác định tọa độ giao điểm của hai đường thẳng

a) $(d) : 2x - y = 3$ và $(d') : x + 2y = 4$;

b) $(d) : 2x + y = 2$ và $(d') : x + \frac{1}{2}y = 1$.

🗨️ Lời giải.

a) Tọa độ giao điểm M của (d) và (d') là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 2y = 4. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được nghiệm là $(2; 1)$.

Vậy tọa độ giao điểm là $(2; 1)$.

b) Tọa độ giao điểm M của (d) và (d') là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x + y = 2 \\ x + \frac{1}{2}y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2 - 2x \\ x + \frac{1}{2}(2 - 2x) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2 - 2x \\ 0 \cdot x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2 - 2x \\ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Hệ đã cho có vô số nghiệm nên (d) trùng với (d') .

Tọa độ giao điểm $N(x; 2 - 2x), x \in \mathbb{R}$.

□

❖ **Ví dụ 13.** Tìm m để ba đường thẳng sau đồng quy

$$(d_1) : 2x - y = 0$$

$$(d_2) : x + y = 3$$

$$(d_3) : 2x - 3y = m.$$

💬 **Lời giải.**

Tọa độ giao điểm M của (d_1) và (d_2) là nghiệm của hệ $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + y = 3. \end{cases}$

Giải hệ phương trình ta được nghiệm là $(1; 2)$.

Để $(d_1), (d_2)$ và (d_3) đồng quy thì (d_3) phải đi qua $(1; 2)$. Do đó

$$2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = m \text{ suy ra } m = -4.$$

Vậy với $m = -4$ thì ba đường thẳng đồng quy.

□

Dạng 6. Xác định tham số m để hệ phương trình thỏa mãn điều kiện về nghiệm số

❖ **Ví dụ 14.** Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} (a+1)x - ay = 5 & (1) \\ x + ay = a^2 + 4a & (2) \end{cases}$$

Tìm giá trị của $a \in \mathbb{Z}$ để cho hệ có nghiệm $(x; y)$ với $x, y \in \mathbb{Z}$.

💬 **Lời giải.**

Từ phương trình (2) ta có $x = a^2 + 4a - ay$. Thay vào (1), ta được

$$(a+1) \cdot (a^2 + 4a - ay) - ay = 5 \Rightarrow a(a+2)y = a^3 + 5a^2 + 4a - 5. \quad (3)$$

- ☑ Nếu $a = 0$ hoặc $a = -2$ thì phương trình (3) vô nghiệm.
- ☑ Điều kiện để hệ có nghiệm duy nhất là $a \neq 0; a \neq -2$. Khi đó

$$y = \frac{a^3 + 5a^2 + 4a - 5}{a(a+2)} \Rightarrow x = \frac{a^2 + 4a + 5}{a+2}.$$

- ☑ Trước hết ta tìm $a \in \mathbb{Z}$ để $x \in \mathbb{Z}$.

$$x = \frac{(a+2)^2 + 1}{a+2} = a+2 + \frac{1}{a+2}.$$

Để $x \in \mathbb{Z}$ thì $a+2 \in U(1)$ hay $a+2 = \pm 1 \Rightarrow a = -3; a = -1$.

- ☑ Với $a = -3$ thì $y = \frac{(-3)^3 + 5 \cdot (-3)^2 + 4 \cdot (-3) - 5}{-3 \cdot (-3+2)} = \frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$.
- ☑ Với $a = -1$ thì $y = \frac{(-1)^3 + 5 \cdot (-1)^2 + 4 \cdot (-1) - 5}{-1 \cdot (-1+2)} = 5 \in \mathbb{Z}$.

Vậy với $a = -1$ thì hệ có nghiệm nguyên là $(2; 5)$. □

❖ **Ví dụ 15.** Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + my = 2 \\ mx - 2y = 1. \end{cases}$

- Tìm số nguyên m để hệ có nghiệm duy nhất $(x; y)$ mà $x > 0, y < 0$.
- Tìm số nguyên m để hệ có nghiệm duy nhất $(x; y)$ mà x, y là các số nguyên.

💬 **Lời giải.**

- Với $m = 0$ thì hệ có nghiệm $\left(2; -\frac{1}{2}\right)$ thỏa mãn đề bài.

$$\bullet \text{ Với } m \neq 0 \text{ thì } \begin{cases} mx + m^2y = 2m \\ mx - 2y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (m^2 + 2)y = 2m - 1 \\ mx - 2y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{2m-1}{m^2+2} \\ x = \frac{m+4}{m^2+2}. \end{cases}$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} x > 0 \\ y < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2m-1}{m^2+2} < 0 \\ \frac{m+4}{m^2+2} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2m-1 < 0 \\ m+4 > 0 \end{cases} \Rightarrow -4 < m < \frac{1}{2}.$$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-3; -2; -1; 0\}$.

Vậy với $m \in \{-3; -2; -1; 0\}$ thì hệ có nghiệm duy nhất thỏa mãn $x > 0; y < 0$.

- Với $m = 0$ thì hệ có nghiệm $\left(2; -\frac{1}{2}\right)$ không thỏa mãn đề bài.

$$\bullet \text{ Với } m \neq 0, \text{ thì hệ có nghiệm duy nhất } \left(\frac{m+4}{m^2+2}; \frac{2m-1}{m^2+2}\right).$$

Trước hết tìm $m \in \mathbb{Z}$ để $x \in \mathbb{Z}$ thì $m+4 : m^2+2$

$$\Rightarrow m^2 + 4m : m^2 + 2 \Rightarrow 4m - 2 : m^2 + 2$$

$$\Rightarrow 4(m+4) - (4m-2) : m^2 + 2 \Rightarrow 18 : m^2 + 2$$

$$\text{mà } m^2 + 2 > 2 \text{ nên } m^2 + 2 \in \{3; 6; 9; 18\} \Rightarrow m^2 \in \{1; 4; 7; 16\}.$$

$$\text{Vì } m \in \mathbb{Z} \text{ nên } m \in \{\pm 1; \pm 2; \pm 4\}.$$

❖ **Ví dụ 16.** Với giá trị nào của m thì hai phương trình sau có nghiệm chung

$$2x^2 + mx - 1 = 0 \text{ và } mx^2 - x + 2 = 0.$$

Lời giải.

Để thỏa mãn bài toán khi và chỉ khi hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x^2 + mx - 1 = 0 \\ mx^2 - x + 2 = 0 \end{cases} \quad (*)$$

có nghiệm.

Đặt $y = x^2$, điều kiện $y \geq 0$.

Khi đó hệ phương trình (*) trở thành $\begin{cases} mx + 2y - 1 = 0 & (1) \\ -x + my + 2 = 0 & (2) \end{cases}$.

Xét phương trình (2) suy ra $x = my + 2$ (3). Thay vào phương trình (1) ta có

$$m(my + 2) + 2y - 1 = 0 \Rightarrow (m^2 + 2)y = 1 - 2m \Rightarrow y = \frac{1 - 2m}{m^2 + 2}.$$

Thay $y = \frac{1 - 2m}{m^2 + 2}$ vào (3) ta có

$$x = m \cdot \left(\frac{1 - 2m}{m^2 + 2} \right) + 2 \Rightarrow x = \frac{m(1 - 2m) + 2(m^2 + 2)}{m^2 + 2} \Rightarrow x = \frac{m + 4}{m^2 + 2}.$$

So sánh với điều kiện suy ra $1 - 2m \geq 0 \Rightarrow m \leq \frac{1}{2}$.

Do $y = x^2$ nên

$$\left(\frac{m + 4}{m^2 + 2} \right)^2 = \frac{1 - 2m}{m^2 + 2} \Rightarrow (m + 4)^2 = (1 - 2m)(m^2 + 2)$$

$$m^3 + 6m + 7 = 0 \Rightarrow (m + 1)(m^2 - m + 1) = 0 \quad (3)$$

Do $m^2 - m + 1 = \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \quad \forall m$. Nên (3) $\Rightarrow m + 1 = 0 \Rightarrow m = -1$.

So sánh với điều kiện thỏa mãn.

Vậy $m = -1$ hai phương trình có nghiệm chung. □

Dạng 7. Toán về quan hệ giữa các số

♦ Ví dụ 17. Tìm hai số tự nhiên có tổng bằng 1006, biết rằng nếu lấy số lớn chia cho số nhỏ thì được thương là 2 và số dư là 124.

Lời giải.

Gọi hai số cần tìm là x và y , trong đó $x < y$. Số dư trong phép chia y cho x là 124 nên $x > 124$. Vậy điều kiện của hai ẩn là $x, y \in \mathbb{N}$ và $124 < x < y$.

Tổng hai số bằng 1006 nên ta có phương trình $x + y = 1006$.

Khi chia y cho x ta được thương là 2, dư 124 nên ta có phương trình $y = 2x + 124$.

Do đó, ta có hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 1006 & (1) \\ y = 2x + 124 & (2) \end{cases}$

Giải hệ phương trình

Từ (2) thế $y = 2x + 124$ vào (1), ta được $3x + 124 = 1006$ hay $3x = 882$, suy ra $x = 294$. Từ đó ta được $y = 2 \cdot 294 + 124 = 712$.

Các giá trị $x = 294$ và $y = 712$ thỏa mãn các điều kiện của ẩn. Vậy hai số cần tìm là 294 và 712. □

♦ Ví dụ 18. Tỉ số của hai số là $3 \div 4$. Nếu giảm số lớn đi 100 và tăng số nhỏ thêm 200 thì tỉ số mới là $5 \div 3$. Tìm hai số đó.

Lời giải.

Gọi số bé là x và số lớn là y ($y > x$).

Tỉ số của hai số là $3 \div 4$ thì ta có $\frac{x}{y} = \frac{3}{4}$ (1)

Nếu giảm số lớn đi 100 và tăng số nhỏ thêm 200 thì tỉ số mới là $5 \div 3$, ta có phương trình

$$\frac{x+100}{y+200} = \frac{5}{3} \quad (2)$$

Từ (1), (2) ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{3}{4} \\ \frac{x+100}{y-100} = \frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 3y = 0 \\ 3x - 5y = -1100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 300 \\ y = 400. \end{cases}$$

Vậy hai số cần tìm là 300 và 400. □

❖ **Ví dụ 19.** Một trường trung học cơ sở mua 500 quyển vở để làm phần thưởng cho học sinh. Giá bán của mỗi quyển vở loại thứ nhất, loại thứ hai lần lượt là 8 000 đồng, 9 000 đồng. Hỏi nhà trường đã mua mỗi loại bao nhiêu quyển vở? Biết rằng số tiền nhà trường đã dùng để mua 500 quyển vở đó là 4 200 000 đồng.

🗨️ Lời giải.

Gọi số quyển vở loại thứ nhất, loại thứ hai lần lượt là x, y ($x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}$).

Theo giả thiết, ta có phương trình: $x + y = 500$.

Mặt khác, ta có phương trình: $8\,000x + 9\,000y = 4\,200\,000$, tức là $8x + 9y = 4200$.

Ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + y = 500 & (1) \\ 8x + 9y = 4\,200 & (2) \end{cases}$$

Nhân phương trình (1) cho 8, ta được
$$\begin{cases} 8x + 8y = 4\,000 & (3) \\ 8x + 9y = 4\,200 & (2) \end{cases}$$

Trừ từng vế phương trình (3) cho phương trình (2), ta được $y = 200$.

Thay giá trị $y = 200$ vào phương trình (1), ta được:

$$x + 200 = 500, \text{ tức là } x = 300.$$

Do đó hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = (300; 200)$.

Vậy nhà trường đã mua 300 quyển vở loại thứ nhất và 200 quyển vở loại thứ hai. □

❖ **Ví dụ 20.** Một nhóm khách vào cửa hàng bán trà sữa. Nhóm khách đó đã mua 6 cốc trà sữa gồm trà sữa trân châu và trà sữa phô mai. Giá mỗi cốc trà sữa trân châu, trà sữa phô mai lần lượt là 33 000 đồng, 28 000 đồng. Tổng số tiền nhóm khách thanh toán cho cửa hàng là 188 000 đồng. Hỏi nhóm khách đó mua bao nhiêu cốc trà sữa mỗi loại?

🗨️ Lời giải.

Gọi x, y (cốc) lần lượt là số cốc trà sữa trân châu và trà sữa phô mai mà nhóm khách đã mua ($x, y \in \mathbb{N}, x < 6, y < 6$).

Vì nhóm khách đã mua 6 cốc trà sữa nên ta có phương trình: $x + y = 6$.

Lại vì nhóm khách thanh toán cho cửa hàng là 188 000 đồng nên ta lại có phương trình

$$33\,000x + 28\,000y = 188\,000 \text{ hay } 33x + 28y = 188.$$

Do đó, ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y = 6 & (1) \\ 33x + 28y = 188 & (2) \end{cases}$$

Từ phương trình (1), ta có $x = 6 - y$. (3)

Thế (3) và (2), ta được

$$\begin{aligned} 33 \cdot (6 - y) + 28y &= 188 \\ 198 - 33y + 28y &= 188 \\ 10 &= 5y \end{aligned}$$

$$y = 2.$$

Thay giá trị $y = 2$ vào phương trình (3), ta có $x = 6 - 2 = 4$.

Do đó hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = (4; 2)$.

Vậy nhóm khách đó đã mua 4 cốc trà sữa trân châu và 2 cốc trà sữa phô mai. □

❖ **Ví dụ 21.** Hai lớp 9A và 9B có tổng số 82 học sinh. Trong dịp tết trồng cây năm 2022, mỗi học sinh lớp 9A trồng được 3 cây, mỗi học sinh lớp 9B trồng được 4 cây nên cả hai lớp trồng được tổng số 288 cây. Gọi x , y lần lượt là số học sinh lớp 9A và lớp 9B ($x \in \mathbb{N}^*$, $y \in \mathbb{N}^*$).

- Từ dữ liệu đã cho, lập hai phương trình bậc nhất hai ẩn biểu thị số học sinh của hai lớp và số cây trồng.
- Giải hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn và cho biết mỗi lớp có bao nhiêu học sinh.

🗨️ Lời giải.

Trong ví dụ, ta tìm được số học sinh của mỗi lớp bằng cách lập và giải hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn. □

Tổng quát, để giải bài toán bằng cách lập hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn, ta thực hiện như sau:

- 🕒 Bước 1: Lập hệ phương trình.
 - Chọn hai ẩn biểu thị hai đại lượng chưa biết và đặt điều kiện thích hợp cho các ẩn.
 - Biểu diễn các đại lượng liên quan theo các ẩn và các đại lượng đã biết.
 - Lập hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng.
- 🕒 Bước 2: Giải hệ phương trình nhận được.
- 🕒 Bước 3: Kiểm tra nghiệm tìm được ở Bước 2 có thỏa mãn điều kiện của ẩn hay không, rồi trả lời bài toán.

❖ **Ví dụ 22.** Hai ngăn của một kệ sách có tổng cộng 400 cuốn sách. Nếu chuyển 80 cuốn sách từ ngăn thứ nhất sang ngăn thứ hai thì số sách ở ngăn thứ hai gấp 3 lần số sách ở ngăn thứ nhất. Tính số sách ở mỗi ngăn lúc đầu.

🗨️ Lời giải.

Gọi x , y lần lượt là số sách ở ngăn thứ nhất, ngăn thứ hai lúc đầu ($x \in \mathbb{N}^*$, $y \in \mathbb{N}^*$). Tổng số sách ở hai ngăn là 400 cuốn, nên ta có phương trình $x + y = 400$ (1).

Sau khi chuyển thì số sách ở ngăn thứ hai gấp 3 lần số sách ở ngăn thứ nhất, nên ta có phương trình $y + 80 = 3(x - 80)$ (2).

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y = 400 \\ y + 80 = 3(x - 80) \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được
$$\begin{cases} x = 180 \\ y = 220 \end{cases}$$
 (thỏa mãn).

Vậy lúc đầu ngăn thứ nhất có 180 cuốn sách, ngăn thứ hai có 220 cuốn sách. □

❖ **Ví dụ 23.** Một mảnh vườn hình chữ nhật có chu vi 64 m. Nếu tăng chiều dài thêm 2 m và tăng chiều rộng thêm 3 m thì diện tích tăng thêm 88 m². Tính chiều dài, chiều rộng của mảnh vườn đó.

🗨️ Lời giải.

Gọi chiều dài, chiều rộng ban đầu hình chữ nhật lần lượt là x m, y m.

Điều kiện $0 < x, y < 32$.

Vì mảnh vườn hình chữ nhật có chu vi 64 m nên ta có phương trình

$$2(x + y) = 64 \Rightarrow 2x + 2y = 64 \quad (1).$$

Diện tích mảnh vườn lúc đầu là xy m².

Khi tăng chiều dài thêm 2 m và tăng chiều rộng thêm 3 m thì diện tích tăng thêm 88 m², ta được phương trình là

$$(x + 2)(y + 3) = xy + 88 \Rightarrow xy + 3x + 2y = xy + 88 \Rightarrow 3x + 2y = 88 \quad (2).$$

Từ (1) và (2) ta được hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y = 32 \\ 3x + 2y = 88. \end{cases}$$

Ta có

$$\begin{aligned} &\begin{cases} 2x + 2y = 64 \\ 3x + 2y = 88 \end{cases} \\ &\begin{cases} x = 24 \\ 2x + 2y = 64 \end{cases} \\ &\begin{cases} x = 24 \\ 2y = 64 - 2x \end{cases} \\ &\begin{cases} x = 24 \\ 2y = 64 - 2 \cdot 24 \end{cases} \\ &\begin{cases} x = 24 \\ 2y = 16 \end{cases} \\ &\begin{cases} x = 24 \\ y = 8. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy chiều dài ban đầu mảnh vườn là 24 m, chiều rộng ban đầu mảnh vườn là 8 m. □

❖ **Ví dụ 24.** Một thửa ruộng hình chữ nhật, nếu tăng chiều dài thêm 2 m, chiều rộng thêm 3 m thì diện tích tăng thêm 100 m². Nếu giảm chiều dài và chiều rộng đi 2 m thì diện tích giảm đi 68 m². Tính diện tích của thửa ruộng đó.

🗨️ Lời giải.

Gọi chiều dài thửa ruộng là x (m) ($x > 0$) và chiều rộng y (m) ($y > 0$).

Nếu tăng chiều dài thêm 2 m, chiều rộng thêm 3 m thì diện tích tăng thêm 100 m².

Ta có phương trình $(x + 2) \cdot (y + 3) = xy + 100$

(1)

Nếu giảm chiều dài và chiều rộng đi 2 m thì diện tích giảm đi 68 m².

Ta có phương trình $(x - 2) \cdot (y - 2) = xy - 68$

(2)

Từ (1), (2) ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} (x + 2)(y + 3) = xy + 100 \\ (x - 2)(y - 2) = xy - 68 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 94 \\ -2x - 2y = -72 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 22 \\ y = 14. \end{cases}$$

Vậy diện tích thửa ruộng là $22 \cdot 14 = 308$ (m²). □

❖ **Ví dụ 25.** Tháng thứ nhất hai tổ sản xuất được 900 chi tiết máy. Tháng thứ hai tổ I vượt mức 15% và tổ thứ II vượt mức 10% so với tháng thứ nhất. Vì vậy hai tổ đã sản xuất được 1010 chi tiết máy. Hỏi tháng thứ nhất mỗi tổ sản xuất được bao nhiêu chi tiết máy?

🗨️ Lời giải.

Gọi số chi tiết máy của tổ I sản xuất được trong tháng thứ nhất là x (chi tiết, $x \in \mathbb{N}$).

Gọi số chi tiết máy của tổ II sản xuất được trong tháng thứ nhất là y (chi tiết, $y \in \mathbb{N}$).

Tháng thứ nhất hai tổ sản xuất được 900 chi tiết máy có phương trình: $x + y = 900$

(1)

Tháng thứ hai tổ I vượt mức 15% và tổ II vượt mức 10% nên đã sản xuất được 1010 chi tiết máy, ta có phương trình

$$\frac{115x}{100} + \frac{110y}{100} = 1010 \quad (2)$$

Từ (1), (2) ta được hệ
$$\begin{cases} x + y = 900 \\ \frac{115x}{100} + \frac{110y}{100} = 1010 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 400 \\ y = 500 \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Vậy trong tháng thứ nhất tổ I sản xuất được 400 chi tiết, tổ II sản xuất được 500 chi tiết máy. □

❖ **Ví dụ 26.** Hai kho chứa 450 tấn hàng. Nếu chuyển 50 tấn từ kho I sang kho II thì số hàng kho II bằng $\frac{4}{5}$ số hàng kho I. Tính số hàng mỗi kho.

Lời giải.

Gọi số hàng trong kho I là x (tấn, $x > 0$); số hàng trong kho II là y (tấn, $y > 0$).
Hai kho chứa 450 tấn hàng nên ta có phương trình:

$$x + y = 450 \quad (1)$$

Nếu chuyển 50 tấn từ kho I sang kho II thì số hàng kho II bằng $\frac{4}{5}$ số hàng kho I ta có phương trình

$$y + 50 = \frac{4}{5} \cdot (x - 50) \quad (2)$$

Từ (1), (2) ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y = 450 \\ y + 50 = \frac{4}{5} \cdot (x - 50) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 300 \\ y = 150 \end{cases}.$$

Vậy trong kho I có 300 tấn hàng, kho II có 150 tấn hàng. □

Dạng 8. Toán liên quan đến chữ số

Viết số dưới dạng thập phân

$$\overline{ab} = 10 \cdot a + b$$

$$\overline{abc} = 100 \cdot a + 10 \cdot b + c$$

với điều kiện

$$0 < a \leq 9; a \in \mathbb{N}$$

$$0 \leq b, c \leq 9; b, c \in \mathbb{N}$$

❖ Ví dụ 27. Tìm số tự nhiên có hai chữ số biết rằng tổng các chữ số của nó bằng 10 và nếu viết số đó theo thứ tự ngược lại thì được số mới nhỏ hơn số ban đầu 18 đơn vị.

Lời giải.

Gọi chữ số hàng chục là x , chữ số hàng đơn vị là y : $0 < x; y \leq 9; x, y \in \mathbb{N}$.
Theo đề bài, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ \overline{xy} = \overline{yx} + 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 10 \\ 10x + y = 10y + x + 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 4 \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Vậy số cần tìm là 64. □

❖ Ví dụ 28. Một số tự nhiên có hai chữ số. Tỉ số giữa chữ số hàng chục và chữ số hàng đơn vị là $\frac{2}{3}$. Nếu viết thêm chữ số 1 xen vào giữa thì được số mới lớn hơn số đã cho là 370 đơn vị. Tìm số đã cho.

Lời giải.

Gọi chữ số hàng chục là x , chữ số hàng đơn vị là y .
Điều kiện: $0 < x; y \leq 9, x, y \in \mathbb{N}$.
Theo đề bài ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{2}{3} \\ \overline{x1y} = \overline{xy} + 370 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2y \\ 100x + 10 + y = 10x + y + 370 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 6 \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Vậy số đã cho là 46. □

❖ **Ví dụ 29.** Tìm số có hai chữ số, biết rằng tổng của chữ số hàng đơn vị và hai lần chữ số hàng chục bằng 10. Ngoài ra, nếu đổi chữ số hàng chục và hàng đơn vị cho nhau thì sẽ được số mới nhỏ hơn số ban đầu 18 đơn vị.

💬 **Lời giải.**

Gọi số có hai chữ số là $\overline{xy} = 10x + y$, với $x, y \in \mathbb{N}$, $1 \leq x, y \leq 9$.

Với giả thiết:

- ☑ Tổng của chữ số hàng đơn vị và hai lần chữ số hàng chục bằng 10, ta được:

$$2x + y = 10. \quad (1)$$

- ☑ Nếu đổi chỗ chữ số hàng chục và hàng đơn vị cho nhau thì sẽ được số mới ($\overline{yx} = 10y + x$) nhỏ hơn số ban đầu 18 đơn vị, ta được:

$$\overline{xy} - \overline{yx} = 18 \Rightarrow (10x + y) - (10y + x) = 18 \Rightarrow x - y = 2. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình: $\begin{cases} 2x + y = 10 \\ x - y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$, thỏa mãn điều kiện.

Vậy, số cần tìm là 42. □

❖ **Ví dụ 30.** Tìm một số có hai chữ số. Biết rằng chữ số hàng chục lớn hơn chữ số hàng đơn vị 6 đơn vị. Nếu viết xen chữ số 0 vào giữa chữ số hàng chục và chữ số hàng đơn vị thì số tự nhiên đó tăng 720 đơn vị.

💬 **Lời giải.**

Gọi số có hai chữ số là $\overline{xy} = 10x + y$, với $x, y \in \mathbb{N}$, $1 \leq x \leq 9$, $0 \leq y \leq 9$.

Với giả thiết

- ☑ Chữ số hàng chục lớn hơn chữ số hàng đơn vị 6 đơn vị, ta được:

$$x - y = 6. \quad (1)$$

- ☑ Khi viết xen chữ số 0 vào giữa chữ số hàng đơn vị (được số $\overline{x0y} = 100x + y$) thì số tự nhiên đó tăng 720 đơn vị, ta được:

$$(100x + y) - (10x + y) = 720 \Rightarrow x = 8. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình $\begin{cases} x - y = 6 \\ x = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 2 \end{cases}$.

Vậy số cần tìm là 82. □

📁 Dạng 9. Toán làm chung công việc

- ☑ Toán làm chung công việc có ba đại lượng tham gia là toàn bộ công việc, phần việc trong một đơn vị thời gian; thời gian.
- ☑ Nếu một đội làm xong công việc trong x ngày thì một ngày đội đó làm được $\frac{1}{x}$ công việc.
- ☑ Xem toàn bộ công việc là 1.

❖ **Ví dụ 31.** Hai đội công nhân cùng làm một đoạn đường trong 24 ngày thì xong. Mỗi ngày, đội I làm được nhiều gấp rưỡi đội II. Hỏi nếu làm một mình thì mỗi đội làm xong đoạn đường đó trong bao lâu? (Giả sử năng suất của mỗi đội là không đổi).

💬 **Lời giải.**

Gọi x là số ngày để đội I hoàn thành công việc nếu làm riêng một mình; y là số ngày để đội II hoàn thành công việc nếu làm riêng một mình. Điều kiện $x > 0$ và $y > 0$.

Mỗi ngày đội I làm được $\frac{1}{x}$ (công việc) và đội II làm được $\frac{1}{y}$ (công việc).

Mỗi ngày đội I làm được nhiều gấp rưỡi đội II nên ta có phương trình $\frac{1}{x} = 1,5 \cdot \frac{1}{y}$ hay $\frac{1}{x} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{y}$.

Hai đội làm chung trong 24 ngày thì xong công việc nên mỗi ngày, hai đội làm chung thì được $\frac{1}{24}$ (công việc). Ta có phương trình

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{24}.$$

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình (I)
$$\begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{y} \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{24}. \end{cases}$$

Đặt $u = \frac{1}{x}$ và $v = \frac{1}{y}$ thì ta có hệ phương trình bậc nhất hai ẩn mới là u và v (II)
$$\begin{cases} u = \frac{3}{2}v & (3) \\ u + v = \frac{1}{24}. & (4) \end{cases}$$

Thế $u = \frac{3}{2}v$ vào phương trình (4), ta được $\frac{3}{2}v + v = \frac{1}{24}$, hay $\frac{5}{2}v = \frac{1}{24}$, suy ra $v = \frac{1}{60}$.

Do đó $u = \frac{3}{2}v = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{60} = \frac{1}{40}$. Từ đó, ta có

$$u = \frac{1}{x} = \frac{1}{40} \text{ suy ra } x = 40; \quad v = \frac{1}{y} = \frac{1}{60} \text{ suy ra } y = 60.$$

Các giá trị tìm được của x và y thoả mãn điều kiện của ẩn.

Trả lời: Nếu làm một mình thì đội I làm xong đoạn đường đó trong 40 ngày, còn đội II làm xong trong 60 ngày.

□

❖ **Ví dụ 32.** Hai công nhân cùng làm một công việc trong 18h thì xong. Nếu người thứ nhất là 6h và người thứ hai là 12h thì chỉ hoàn thành 50% công việc. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi người hoàn thành công việc trong bao lâu?

🗨️ Lời giải.

Gọi thời gian người thứ nhất làm một mình thì hoàn thành công việc là x (giờ, $x > 0$); người thứ hai làm một mình hoàn thành công việc là y (giờ, $y > 0$).

Trong 1h người thứ nhất làm được $\frac{1}{x}$ công việc, người thứ hai làm được $\frac{1}{y}$ công việc.

Hai người làm chung 18h thì xong, ta có phương trình:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{18} \quad (1)$$

Nếu người thứ nhất làm trong 6h và người thứ hai làm trong 12h thì hoàn thành 50% công việc, ta có phương trình:

$$\frac{6}{x} + \frac{12}{y} = 50\% \quad (2)$$

Từ (1), (2) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{18} \\ \frac{6}{x} + \frac{12}{y} = 50\% \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 36 \\ y = 36 \end{cases} \text{ (thoả mãn điều kiện).}$$

Vậy nếu làm riêng thì người thứ nhất hoàn thành công việc trong 36h và người thứ hai hoàn thành công việc trong 36h. □

❖ **Ví dụ 33.** Nếu hai vòi nước cùng chảy vào một bể không có nước thì bể sẽ đầy trong 1 giờ 20 phút. Nếu mở riêng vòi thứ nhất trong 10 phút và vòi thứ hai trong 12 phút thì chỉ được $\frac{2}{15}$ bể nước. Hỏi nếu mở riêng từng vòi thì thời gian để mỗi vòi chảy đầy bể nước là bao nhiêu phút?

☞ **Lời giải.**

Gọi x, y (phút) lần lượt là thời gian mỗi vòi chảy đầy bể nếu mở riêng từng vòi.

Trong một giờ, vòi thứ nhất chảy được $\frac{1}{x}$ (bể) và vòi thứ hai chảy được $\frac{1}{y}$ (bể).

Hai vòi cùng chảy vào bể thì sau 1 giờ 20 phút = 80 phút thì đầy bể nên $\frac{80}{x} + \frac{80}{y} = 1$.

Nếu vòi thứ nhất chảy trong 10 phút và vòi thứ hai chảy trong 12 phút thì chỉ chảy được $\frac{2}{15}$ bể nên $\frac{10}{x} + \frac{12}{y} = \frac{2}{15}$.

Ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{80}{x} + \frac{80}{y} = 1 \\ \frac{10}{x} + \frac{12}{y} = \frac{2}{15} \end{cases}$$

Đặt ẩn phụ $u = \frac{1}{x}$ và $v = \frac{1}{y}$, ta đưa về hệ phương trình
$$\begin{cases} 80u + 80v = 1 \\ 10u + 12v = \frac{2}{15} \end{cases}$$
, giải hệ phương trình ta được
$$\begin{cases} u = \frac{1}{120} \\ v = \frac{1}{240} \end{cases}$$
,

tức là
$$\begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{1}{120} \\ \frac{1}{y} = \frac{1}{240} \end{cases}$$
 Suy ra
$$\begin{cases} x = 120 \\ y = 240. \end{cases}$$

Vậy nếu làm riêng thì người thứ nhất hoàn thành xong công việc trong 120 phút và người thứ hai hoàn thành công việc trong 240 phút. □

❖ **Ví dụ 34.** Hai vòi nước cùng chảy vào một bể không có nước thì sau 1h30 phút sẽ đầy bể. Nếu mở vòi I chảy trong 15 phút rồi khóa lại và mở vòi thứ II chảy trong 20 phút thì được $\frac{1}{5}$ bể. Hỏi nếu mỗi vòi chảy riêng thì bao lâu đầy bể?

☞ **Lời giải.**

Ta có 1h30 phút = $\frac{3}{2}$ h; 15 phút = $\frac{1}{4}$ h; 20 phút = $\frac{1}{3}$ h.

Gọi thời gian vòi I chảy một mình đầy bể là x (h; $x > 0$);

Thời gian vòi II chảy một mình đầy bể là y (h; $y > 0$).

Hai vòi cùng chảy thì sau 1h30 phút đầy bể, ta có phương trình

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{3} \quad (1)$$

Vòi I chảy trong 15 phút và vòi II chảy trong 20 phút thì được $\frac{1}{5}$ bể ta có phương trình

$$\frac{1}{4x} + \frac{1}{3y} = \frac{1}{5} \quad (2)$$

Từ (1), (2) ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{3} \\ \frac{1}{4x} + \frac{1}{3y} = \frac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{15}{4} \\ y = \frac{5}{2} \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Vậy nếu chảy riêng thì vòi I chảy đầy bể trong $\frac{15}{4}$ h, vòi II chảy đầy bể trong $\frac{5}{2}$ h. □

❖ **Ví dụ 35.** Hai vòi nước cùng chảy vào một bể nước cạn (không có nước) thì sau $4\frac{4}{5}$ giờ đầy bể. Nếu lúc đầu chỉ mở vòi thứ nhất và 9 giờ sau mới mở thêm vòi thứ hai thì sau $\frac{6}{5}$ giờ nữa mới đầy bể. Hỏi nếu ngay từ đầu chỉ mở vòi thứ hai thì sau bao lâu sẽ đầy bể.

🗨 **Lời giải.**

Gọi x và y là thời gian để vòi thứ nhất và vòi thứ hai chảy một mình thì đầy bể ($x > 0, y > 0$, đơn vị giờ). Do đó:

- 🕒 Trong 1 giờ vòi thứ nhất chảy được $\frac{1}{x}$ phần của bể.
- 🕒 Trong 1 giờ vòi thứ hai chảy được $\frac{1}{y}$ phần của bể.
- 🕒 Trong 1 giờ cả hai vòi chảy được $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ phần của bể.

Hai vòi cùng chảy thì trong $4\frac{4}{5} = \frac{24}{5}$ giờ sẽ đầy bể, nên mỗi giờ hai vòi chảy được $1 : \frac{24}{5} = \frac{5}{24}$ (bể). Do đó, ta có phương trình $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{24}$. (1)

Nếu lúc đầu chỉ mở vòi thứ nhất và 9 giờ sau mới mở thêm vòi thứ hai thì sau $\frac{6}{5}$ giờ nữa mới đầy bể. Do đó, ta có phương trình $\frac{9}{x} + \frac{5}{24} \cdot \frac{6}{5} = 1$. (2)

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{24} \\ \frac{9}{x} + \frac{5}{24} \cdot \frac{6}{5} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{24} \\ \frac{9}{x} + \frac{1}{4} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{24} \\ 36 + x = 4x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 8 \\ x = 12. \end{cases}$$

Vậy nếu vòi thứ hai chảy một mình thì sau 8 giờ sẽ đầy bể. □

❖ **Ví dụ 36.** Hai vòi nước cùng chảy vào một bể không có nước thì sau 1 giờ 20 phút sẽ đầy. Nếu mở vòi thứ nhất chảy trong 10 phút và vòi thứ hai chảy trong 12 phút thì đầy $\frac{2}{15}$ bể. Hỏi mỗi vòi chảy một mình thì sau bao lâu mới đầy bể?

🗨 **Lời giải.**

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách trình bày sau:

Cách 1: Thiết lập ẩn thông qua giá trị cần tìm.

Gọi x là thời gian để vòi I chảy một mình cho đầy bể, điều kiện $x > 0$. Suy ra, mỗi giờ vòi I chảy được $\frac{1}{x}$ bể.

Gọi y là thời gian để vòi II chảy một mình cho đầy bể, điều kiện $y > 0$. Suy ra, mỗi giờ vòi II chảy được $\frac{1}{y}$ bể.

Ta thực hiện đổi đơn vị:

$$1 \text{ giờ } 20 \text{ phút} = 1 + \frac{20}{60} = \frac{4}{3} \text{ giờ}; \quad 10 \text{ phút} = \frac{1}{6} \text{ giờ}; \quad 12 \text{ phút} = \frac{1}{5} \text{ giờ}.$$

Với giả thiết:

- 🕒 Hai vòi nước cùng chảy vào một bể không có nước thì sau 1 giờ 20 phút sẽ đầy, ta được

$$\frac{4}{3} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) = 1 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{4}. \quad (1)$$

- 🕒 Nếu mở vòi thứ nhất chảy trong 10 phút và vòi thứ hai chảy trong 12 phút thì đầy $\frac{2}{15}$, ta được

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{y} = \frac{2}{15} \Rightarrow \frac{1}{6x} + \frac{1}{5y} = \frac{2}{15}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{4} \\ \frac{1}{6x} + \frac{1}{5y} = \frac{2}{15} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{6}{6x} + \frac{5}{5y} = \frac{3}{4} \\ \frac{1}{6x} + \frac{1}{5y} = \frac{2}{15} \end{cases} \quad (I)$$

Đặt $\begin{cases} u = \frac{1}{6x} \\ v = \frac{1}{5y} \end{cases}$. Khi đó, hệ có dạng

$$\begin{cases} 6u + 5v = \frac{3}{4} \\ u + v = \frac{2}{15} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = \frac{1}{12} \\ v = \frac{1}{20} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{6x} = \frac{1}{12} \\ \frac{1}{5y} = \frac{1}{20} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 4. \end{cases}$$

Vậy vòi I chảy trong 2 giờ sẽ đầy bể, vòi II chảy trong 4 giờ sẽ đầy bể.

Cách 2: Thiết lập ẩn thông qua giá trị trung gian.

Giả sử mỗi giờ vòi I chảy được x phần bể, điều kiện $x > 0$.

Giả sử mỗi giờ vòi II chảy được y phần bể, điều kiện $y > 0$.

Với giả thiết:

- ☑ Hai vòi nước cùng chảy vào một bể không có nước thì sau 1 giờ 20 phút sẽ đầy, ta được

$$\frac{4}{3}(x + y) = 1 \Rightarrow 4x + 4y = 3. \quad (3)$$

- ☑ Nếu mở vòi thứ nhất chảy trong 10 phút và vòi thứ hai chảy trong 12 phút thì đầy $\frac{2}{15}$ bể, ta được

$$\frac{1}{6} \cdot x + \frac{1}{5} \cdot y = \frac{2}{15} \Rightarrow 5x + 6y = 4. \quad (4)$$

Từ (3) và (4), ta có hệ phương trình $\begin{cases} 4x + 4y = 3 \\ 5x + 6y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{4} \end{cases}$.

Vậy vòi I chảy trong 2 giờ sẽ đầy bể, vòi II chảy trong 4 giờ sẽ đầy bể. □

Dạng 10. Toán chuyển động

- ☑ Toán chuyển động có ba đại lượng tham gia: vận tốc (v), thời gian (t), quãng đường (S).

☑ $v = \frac{S}{t}, S = v \cdot t, t = \frac{S}{v}.$

❖ **Ví dụ 37.** Một chiếc xe khách đi từ Thành phố Hồ Chí Minh đến Cần Thơ, quãng đường dài 170 km. Sau khi xe khách xuất phát 1 giờ 40 phút, một chiếc xe tải bắt đầu đi từ Cần Thơ về Thành phố Hồ Chí Minh và gặp xe khách sau đó 40 phút. Tính vận tốc của mỗi xe, biết rằng mỗi giờ xe khách đi nhanh hơn xe tải 15 km.

Lời giải.

Gọi x (km/h) là vận tốc của xe tải và y (km/h) là vận tốc xe khách ($x, y > 0$).

Do mỗi giờ xe khách đi nhanh hơn xe tải 15 km nên $x = y + 15$.

Do sau khi xe khách xuất phát 1 giờ 40 phút, một chiếc xe tải bắt đầu đi từ Cần Thơ về Thành phố Hồ Chí Minh và gặp xe khách sau đó 40 phút nên tổng quãng đường hai xe là 170. Từ đó, ta có phương trình $\frac{2}{3}y + \left(2 + \frac{1}{3}\right)x = 170$.

Từ đó, ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} x = y + 15 \\ \frac{2}{3}y + \left(2 + \frac{1}{3}\right)x = 170. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên, ta có nghiệm là
$$\begin{cases} x = 60 \\ y = 45. \end{cases}$$

Vậy vận tốc của xe khách 60 (km/h), vận tốc của xe tải 45 (km/h). □

❖ **Ví dụ 38.** Một ca nô đi từ A đến B với vận tốc và thời gian dự định. Nếu ca nô tăng vận tốc thêm 3 km/h thì thời gian rút ngắn được 2 giờ. Nếu ca nô giảm vận tốc đi 3 km/h thì thời gian tăng 3 giờ. Tính vận tốc và thời gian dự định của ca nô.

🗨 **Lời giải.**

Gọi vận tốc dự định của ca nô là x (km/h; $x > 3$) và thời gian dự định đi từ A đến B là y (giờ; $y > 0$).

Nếu ca nô tăng vận tốc thêm 3 km/h thì thời gian rút ngắn được 2 giờ, ta có phương trình

$$(x + 3) \cdot (y - 2) = x \cdot y \quad (1)$$

Nếu ca nô giảm vận tốc đi 3 km/h thì thời gian tăng thêm 3 giờ, ta có phương trình

$$(x - 3) \cdot (y + 3) = x \cdot y \quad (2)$$

Từ (1), (2) ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} (x + 3) \cdot (y - 2) = xy \\ (x - 3) \cdot (y + 3) = xy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 15 \\ y = 12 \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Vậy vận tốc dự định của ca nô là 15 km/h và thời gian dự định của ca nô là 12 giờ. □

❖ **Ví dụ 39.** Một ca nô chạy trên sông trong 8 giờ xuôi dòng được 81km và ngược dòng 105 km. Một lần khác, ca nô chạy trên sông trong 4 giờ xuôi dòng 54 km và ngược dòng 42 km. Tính vận tốc riêng của ca nô và vận tốc dòng nước. (Biết vận tốc riêng của ca nô; vận tốc dòng nước không đổi).

🗨 **Lời giải.**

Gọi vận tốc riêng của ca nô là x (km/h; $x > 0$) và vận tốc dòng nước là y (km/h; $x > y > 0$).

Suy ra vận tốc xuôi dòng của ca nô là $(x + y)$ (km/h) và vận tốc ngược dòng của ca nô là $(x - y)$ (km/h).

Ca nô chạy trong 8 giờ xuôi dòng được 81 km và ngược dòng được 105 km, ta có phương trình

$$\frac{81}{x + y} + \frac{105}{x - y} = 8 \quad (1)$$

Ca nô chạy trong 4 giờ xuôi dòng được 54 km và ngược dòng được 42 km, ta có phương trình

$$\frac{54}{x + y} + \frac{42}{x - y} = 4 \quad (2)$$

Từ (1), (2) ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{81}{x + y} + \frac{105}{x - y} = 8 \\ \frac{54}{x + y} + \frac{42}{x - y} = 4. \end{cases}$$

Đặt $u = \frac{1}{x + y}$; $v = \frac{1}{x - y}$, ta có
$$\begin{cases} 81u + 105v = 8 \\ 54u + 42v = 4. \end{cases}$$

Giải hệ ta có
$$\begin{cases} u = \frac{1}{27} \\ v = \frac{1}{21} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 27 \\ x - y = 21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 24 \\ y = 3 \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Vậy vận tốc riêng của ca nô là 24 km/h và vận tốc dòng nước là 3 km/h. □

❖ **Ví dụ 40.** Một xe máy đi từ A đến B trong thời gian đã định. Nếu đi với vận tốc 45 km/h sẽ tới B chậm mất nửa giờ. Nếu đi với vận tốc 60 km/h sẽ tới B sớm 45 phút. Tính quãng đường AB và thời gian dự định.

☞ **Lời giải.**

Ta có 45 phút = $\frac{3}{4}$ giờ.

Gọi quãng đường AB là x (km; $x > 0$) và thời gian dự định đi từ A đến B là y (h, $y > 0$).

Nếu đi với vận tốc 45 km/h sẽ tới B chậm nửa giờ, ta có phương trình

$$x = 45 \cdot \left(y + \frac{1}{2}\right) \quad (1)$$

Nếu đi với vận tốc 60 km/h sẽ tới B sớm 45 phút, ta có phương trình

$$x = 60 \cdot \left(y - \frac{3}{4}\right) \quad (2)$$

Từ (1), (2) ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} x = 45 \cdot \left(y + \frac{1}{2}\right) \\ y = 60 \cdot \left(y - \frac{3}{4}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 225 \\ y = 4,5 \end{cases}.$$

Vậy quãng đường AB dài 225 km và thời gian dự định đi từ A đến B hết 4,5 giờ. □

❖ **Ví dụ 41.** Lúc 7 giờ một người đi xe máy khởi hành từ A với vận tốc 40km/h. Sau đó, lúc 8 giờ 30 phút, một người khác cũng đi xe máy từ A đuổi theo với vận tốc 60km/h. Hỏi hai người gặp nhau lúc mấy giờ?

☞ **Lời giải.**

Ta thực hiện đổi đơn vị: 8 giờ 30 phút = $8 + \frac{30}{60} = \frac{17}{2}$ (giờ).

Gọi x là thời gian hai người gặp nhau, điều kiện $x > \frac{17}{2}$.

Gọi y là độ dài quãng đường từ A tới điểm gặp nhau, điều kiện $y > 0$.

Với giả thiết:

- ☑ Người thứ nhất đi với vận tốc 40km/h và xuất phát lúc 7 giờ, ta được:

$$40(x - 7) = y \Rightarrow 40x - y = 280. \quad (1)$$

- ☑ Người thứ hai đi với vận tốc 60km/h và xuất phát lúc 8 giờ 30 phút, ta được:

$$60\left(x - \frac{17}{2}\right) = y \Rightarrow 60x - y = 510. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} 40x - y = 280 \\ 60x - y = 510 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 11\frac{1}{2} = 11 \text{ giờ } 30 \text{ phút} \\ y = 180 \end{cases}.$$

Vậy họ gặp nhau lúc 11 giờ 30 phút. □

❖ **Ví dụ 42.** Hai người ở hai địa điểm A và B cách nhau 3.6km, khởi hành cùng một lúc, đi ngược chiều và gặp nhau ở một địa điểm cách A là 2km. Nếu cả hai cùng giữ nguyên vận tốc như trong trường hợp trên, nhưng người đi chậm xuất phát trước người kia 6 phút thì họ sẽ gặp nhau ở chính giữa quãng đường. Tính vận tốc của mỗi người.

☞ **Lời giải.**

Đổi 6 phút = $\frac{1}{10}$ giờ.

Gọi x là vận tốc của người đi nhanh hơn ($x > 0$, đơn vị km/h).

Gọi y là vận tốc của người đi chậm hơn ($y > 0$, đơn vị km/h).

Hai người khởi hành cùng một lúc, đi ngược chiều nhau và gặp nhau ở một địa điểm cách A là 2km (nghĩa là cách B là 1.6km). Lúc đó

☑ Người đi nhanh mất $\frac{2}{x}$ (h).

☑ Người đi chậm mất $\frac{1.6}{y}$ (h).

Do đó, ta có phương trình $\frac{2}{x} = \frac{1.6}{y}$. (1)

Nếu cả hai cùng giữ nguyên vận tốc như trong trường hợp trên, nhưng người đi chậm xuất phát trước người kia 6 phút thì họ sẽ gặp nhau chính giữa quãng đường. Lúc đó:

☑ Người đi nhanh mất $\frac{1.8}{x}$ (h).

☑ Người đi chậm mất $\frac{1.8}{y} + \frac{1}{10}$ (h).

Do đó, ta có phương trình $\frac{1.8}{x} = \frac{1.8}{y} + \frac{1}{10}$. (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ
$$\begin{cases} \frac{2}{x} = \frac{1.6}{y} \\ \frac{1.8}{x} = \frac{1.8}{y} + \frac{1}{10} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2.5 \\ y = 2 \end{cases}.$$

Vậy vận tốc của người đi nhanh là 2.5km/h và vận tốc của người đi chậm là 2km/h. □

💡 **Ví dụ 43.** Hai cano cùng khởi hành từ bến A và B cách nhau 85km, đi ngược chiều nhau. Sau 1 giờ 40 phút thì gặp nhau. Tính vận tốc riêng của mỗi cano. Biết rằng cano đi xuôi lớn hơn vận tốc riêng của cano đi ngược 9km/h và vận tốc nước là 3km/h.

🗨️ Lời giải.

Ta thực hiện đổi đơn vị: 1 giờ 40 phút = $1 + \frac{40}{60} = \frac{5}{3}$ giờ.

Gọi x là vận tốc riêng của cano đi xuôi dòng, điều kiện $x > 0$. Do đó, khi đi xuôi dòng nó đi với vận tốc $(x + 3)$ km/h.

Gọi y là vận tốc riêng của cano đi ngược dòng, điều kiện $y > 3$. Do đó, khi đi ngược dòng nó đi với vận tốc $(y - 3)$ km/h.

Với giả thiết:

☑ Vận tốc riêng của cano đi xuôi lớn hơn vận tốc riêng của cano đi ngược 9km/h, ta được: $x - y = 9$. (1)

☑ Sau 1 giờ 40 phút hai cano gặp nhau, ta được:

$$\frac{5}{3} [(x + 3) + (y - 3)] = 85 \Rightarrow x + y = 51. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} x - y = 9 \\ x + y = 51 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 30 \\ y = 21 \end{cases}.$$

Vậy vận tốc riêng của cano đi xuôi bằng 30km/h, vận tốc riêng của cano đi ngược bằng 21km/h. □

💡 **Ví dụ 44.** Hai vật chuyển động đều trên một đường tròn đường kính 20cm, xuất phát cùng một lúc, từ cùng một điểm. Nếu chuyển động cùng chiều thì cứ 20 giây chúng lại gặp nhau. Nếu chuyển động ngược chiều thì cứ 4 giây chúng lại gặp nhau. Tính vận tốc của mỗi vật.

🗨️ Lời giải.

Gọi x và y là vận tốc của các vật ($x, y > 0$, đơn vị cm/s).

☑ Nếu chuyển động cùng chiều thì cứ 20 giây chúng lại gặp nhau.

Do đó, ta có $\frac{20\pi}{x - y} = 20$.

- ☑ Nếu chuyển động ngược chiều thì cứ 4 giây chúng lại gặp nhau.

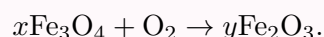
Do đó, ta có $\frac{20\pi}{x+y} = 4$.

Ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{20\pi}{x-y} = 20 \\ \frac{20\pi}{x+y} = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 20\pi = 20x - 20y \\ 20\pi = 4x + 4y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3\pi \\ y = 2\pi \end{cases}.$$

Vậy vận tốc vật thứ nhất là $3\pi\text{cm/s}$ và vận tốc vật thứ hai là $2\pi\text{cm/s}$. □

Dạng 11. Toán có nội dung lí, hóa

♦ **Ví dụ 45.** Tìm các hệ số x, y để cân bằng phương trình phản ứng hóa học:



 **Lời giải.**

Theo định luật bảo toàn nguyên tố đối với Fe và O, ta có:
$$\begin{cases} 3x = 2y & (1) \\ 4x + 2 = 3y & (2) \end{cases}$$

Từ phương trình (1), ta suy ra $y = \frac{3}{2}x$. (3)

Thế (3) và (2), ta được

$$\begin{aligned} 4x + 2 &= 3 \cdot \frac{3}{2}x \\ 4x + 2 &= \frac{9}{2}x \\ 2 &= \frac{1}{2}x \\ x &= 4. \end{aligned}$$

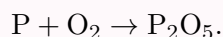
Thay giá trị $x = 4$ vào phương trình (3), ta có

$$y = \frac{3}{2} \cdot 4 = 6.$$

Do đó, hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = (4; 6)$.

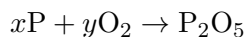
Vậy ta có phương trình sau cân bằng: $4\text{Fe}_3\text{O}_4 + \text{O}_2 \rightarrow 6\text{Fe}_2\text{O}_3$. □

♦ **Ví dụ 46.** Cân bằng phương trình hoá học sau bằng phương pháp đại số.



 **Lời giải.**

Gọi x, y lần lượt là hệ số của P và O_2 thoả mãn cân bằng phương trình hoá học

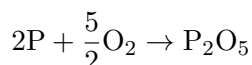


Cân bằng số nguyên tử P, số nguyên tử O ở hai vế, ta được hệ

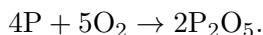
$$\begin{cases} x = 2 \\ 2y = 5. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này, ta được $x = 2, y = \frac{5}{2}$.

Đưa các hệ số tìm được vào phương trình hoá học, ta có

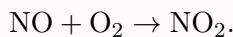


Do các hệ số của phương trình hoá học phải là số nguyên nên nhân hai vế của phương trình hoá học trên với 2, ta được



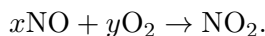
□

❖ **Ví dụ 47.** Cân bằng phương trình hoá học sau bằng phương pháp đại số.



💬 **Lời giải.**

Gọi x, y lần lượt là hệ số của NO và O_2 thỏa mãn cân bằng phương trình hóa học

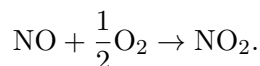


Cân bằng số nguyên tử NO , số nguyên tử O_2 ở hai vế, ta được hệ

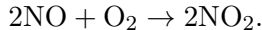
$$\begin{cases} x = 1 \\ x + 2y = 2. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên ta được $\begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{2}. \end{cases}$

Đưa các hệ số tìm được vào phương trình hóa học, ta có



Do các hệ số của phương trình hoá học phải là số nguyên nên nhân hai vế của phương trình hoá học trên với 2, ta được



□

❖ **Ví dụ 48.** Có hai loại quặng chứa 75 % sắt và 50 % sắt. Tính khối lượng của mỗi loại quặng đem trộn để được 25 tấn quặng chứa 66 % sắt.

💬 **Lời giải.**

Gọi khối lượng quặng chứa 75% sắt và 50 % sắt lần lượt là x, y (tấn; $x, y > 0$).

Theo đề bài ta có hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 25 \\ \frac{75x}{100} + \frac{50y}{100} = \frac{66}{100} \cdot 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 16 \\ y = 9 \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy đem 16 tấn loại quặng chứa 75 % sắt; 9 tấn quặng chứa 50 % sắt.

□

❖ **Ví dụ 49.** Người ta cho thêm 1 kg nước vào dung dịch A thì được dung dịch B có nồng độ axit là 20 %. Sau đó lại cho thêm 1 kg axit vào dung dịch B thì được dung dịch C có nồng độ axit là $33\frac{1}{3}\%$. Tính nồng độ axit trong dung dịch A.

💬 **Lời giải.**

Gọi khối lượng axit trong dung dịch A là x (kg; $x > 0$) và khối lượng nước trong dung dịch A là y (kg; $y > 0$). Cho thêm 1 kg nước vào dung dịch A thì được dung dịch B có nồng độ axit là 20 % ta có phương trình

$$\frac{x}{x + y + 1} = 20\% \quad (1)$$

Cho thêm 1 kg axit vào dung dịch B thì được dung dịch C có nồng độ axit là $33\frac{1}{3}\%$ ta có phương trình

$$\frac{x + 1}{x + y + 2} = 33\frac{1}{3}\% \quad (2)$$

Từ (1), (2) ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{x}{x+y+1} = 20 \\ \frac{x+1}{x+y+2} = 33\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Vậy nồng độ axit trong dung dịch A là $\frac{1}{3+1} = \frac{1}{4} = 25\%$. □



BÀI TẬP VẬN DỤNG

❖ **Bài 1.** Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp thế

a)
$$\begin{cases} x - y = 3 \\ 3x - 4y = 2; \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 7x - 3y = 13 \\ 4x + y = 2; \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 0,5x - 1,5y = 1 \\ -x + 3y = 2. \end{cases}$$

💬 **Lời giải.**

a) Từ phương trình thứ nhất ta có $x = y + 3$. Thế vào phương trình thứ hai, ta được $3(y + 3) - 4y = 2$ hay $-y + 7 = 0$, suy ra $y = 7$.

Từ đó $x = 7 + 3 = 10$. Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(10; 7)$.

b) Từ phương trình thứ hai ta có $y = 2 - 4x$. Thế vào phương trình thứ nhất, ta được $7x - 3(2 - 4x) = 13$ hay $19x - 19 = 0$, suy ra $x = 1$.

Từ đó $y = 2 - 4 \cdot 1 = -2$. Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(1; -2)$.

c) Từ phương trình thứ hai ta có $x = 3y - 2$. Thế vào phương trình thứ nhất, ta được $0,5 \cdot (3y - 2) - 1,5y = 1$ hay $0y = 0$.

Ta thấy mọi giá trị của y đều thỏa mãn phương trình $0y = 0$.

Vậy với giá trị tùy ý của y , giá trị tương ứng của x được tính bởi phương trình $x = 3y - 2$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(3y - 2, y)$ với $y \in \mathbb{R}$ tùy ý. □

❖ **Bài 2.** Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp thế

a)
$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 3x + 2y = 8. \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}y = -2 \\ \frac{3}{2}x - y = 4. \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 4x - 2y = 1 \\ -2x + y = 0. \end{cases}$$

💬 **Lời giải.**

a)
$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 3x + 2y = 8 \\ x = 2y \\ 3 \cdot 2y + 2y = 8 \\ x = 2y \\ 8y = 8 \\ x = 2 \\ y = 1. \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1. \end{cases}$

b)
$$\begin{cases} -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}y = -2 \\ \frac{3}{2}x - y = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}x - 4\right) = -2 \\ y = \frac{3}{2}x - 4 \\ 0x = 0 \\ y = \frac{3}{2}x - 4. \end{cases}$$

Phương trình $0x = 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Vậy hệ phương trình có vô số nghiệm.

Các nghiệm của hệ được viết như sau $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = \frac{3}{2}x - 4. \end{cases}$

$$\text{c) } \begin{cases} 4x - 2y = 1 \\ -2x + y = 0 \\ 4x - 2 \cdot 2x = 1 \\ y = 2x \\ 0x = 1 \\ -2x + y = 0. \end{cases}$$

Phương trình $0x = 1$ vô nghiệm.

Vậy hệ phương trình vô nghiệm.

□

⇒ **Bài 3.** Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp cộng đại số

$$\text{a) } \begin{cases} 3x + 2y = 6 \\ 2x - 2y = 14; \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 0,3x + 0,5y = 3 \\ 1,5x - 2y = 1,5; \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} -2x + 6y = 8 \\ 3x - 9y = -12. \end{cases}$$

🗨 **Lời giải.**

a) Cộng từng vế của phương trình ta được $5x = 20$, suy ra $x = 4$.

Thế $x = 4$ vào phương trình thứ nhất ta được $3 \cdot 4 + 2y = 6$, hay $2y = -6$, suy ra $y = -3$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(4; -3)$.

b) Nhân hai vế của phương trình thứ nhất cho 4, ta có hệ $\begin{cases} 1,2x + 2y = 12 \\ 1,5x - 2y = 1,5. \end{cases}$

Cộng từng vế của phương trình ta được $2,7x = 13,5$, suy ra $x = 5$.

Thế $x = 5$ vào phương trình thứ hai, ta được $1,5 \cdot 5 - 2y = 1,5$, hay $-2y = -6$, suy ra $y = 3$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(5; 3)$.

c) Nhân hai vế của phương trình thứ nhất cho $\frac{3}{2}$, ta có hệ $\begin{cases} -3x + 9y = 12 \\ 3x - 9y = -12. \end{cases}$

Cộng từng vế của phương trình ta được $0x + 0y = 0$. Hệ thức này luôn thỏa mãn với các giá trị tùy ý của x và y .

Với giá trị tùy ý của y , giá trị của x được tính nhờ hệ thức $3x - 9y = -12$, suy ra $x = 3y - 4$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(3y - 4; y)$ với $y \in \mathbb{R}$.

□

⇒ **Bài 4.** Giải các hệ phương trình:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x - 3y = -5 \\ x + 3y = 11. \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 2x + 3y = 3. \end{cases}$$

🗨 **Lời giải.**

- a) Cộng từng vế hai phương trình của hệ, ta được $3x = 6$. Suy ra $x = 2$.
Thay $x = 2$ vào phương trình thứ hai của hệ, ta được $2 + 3y = 11$. Do đó $y = 3$.
Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $(2; 3)$.
- b) Nhân hai vế của phương trình thứ nhất với 2, nhân hai vế của phương trình thứ hai với -3 , ta được
- $$\begin{cases} 6x + 4y = 14 \\ -6x - 9y = -9 \end{cases}$$
- Cộng từng vế hai phương trình của hệ, ta được $-5y = 5$. Suy ra $y = -1$.
Thay $y = -1$ vào phương trình $3x + 2y = 7$, ta được $3x + 2 \cdot (-1) = 7$. Do đó $x = 3$.
Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $(3; -1)$.



🔹 **Bài 5.** Giải các hệ phương trình:

a)
$$\begin{cases} 2x - 5y = -14 \\ 2x + 3y = 2 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 4x + 5y = 15 \\ 6x - 4y = 11 \end{cases}$$

🗨 **Lời giải.**

a) Ta có

$$\begin{aligned} &\begin{cases} 2x - 5y = -14 \\ 2x + 3y = 2 \end{cases} \\ &\begin{cases} 2x - 5y = -14 \\ -8y = -16 \end{cases} \\ &\begin{cases} 2x = -14 + 5y \\ y = 2 \end{cases} \\ &\begin{cases} x = \frac{-14 + 5 \cdot 2}{2} \\ y = 2 \end{cases} \\ &\begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $(-2; 2)$.

b) Ta có

$$\begin{aligned} &\begin{cases} 4x + 5y = 15 \\ 6x - 4y = 11 \end{cases} \\ &\begin{cases} 12x + 15y = 45 \\ 12x - 8y = 22 \end{cases} \\ &\begin{cases} 4x + 5y = 15 \\ 23y = 23 \end{cases} \\ &\begin{cases} 4x = 15 - 5y \\ y = 1 \end{cases} \\ &\begin{cases} x = \frac{15 - 5 \cdot 1}{4} \\ y = 1 \end{cases} \\ &\begin{cases} x = \frac{5}{4} \\ y = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $\left(\frac{5}{4}; 1\right)$.

❖ **Bài 6.** Giải các hệ phương trình:

$$\text{a) } \begin{cases} 3x + y = 3 \\ 2x - y = 7; \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x - y = 3 \\ 3x - 4y = 2; \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 4x + 5y = -2 \\ 2x - y = 8; \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} 3x + y = 3 \\ -3y = 5. \end{cases}$$

🗨 **Lời giải.**

$$\begin{aligned} \text{a) } & \begin{cases} 3x + y = 3 \\ 2x - y = 7 \\ y = 3 - 3x \\ 2x - (3 - 3x) = 7 \\ y = 3 - 3x \\ 5x = 10 \\ y = -3 \\ x = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $(2; -3)$.

$$\begin{aligned} \text{b) } & \begin{cases} x - y = 3 \\ 3x - 4y = 2 \\ x = 3 + y \\ 3(3 + y) - 4y = 2 \\ x = 3 + y \\ -y = -7 \\ x = 10 \\ y = 7. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $(10; 7)$.

$$\begin{aligned} \text{c) } & \begin{cases} 4x + 5y = -2 \\ 2x - y = 8 \\ 4x + 5(2x - 8) = -2 \\ y = 2x - 8 \\ 14x = 38 \\ y = 2x - 8 \\ x = \frac{19}{7} \\ y = \frac{-18}{7}. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $\left(\frac{19}{7}; \frac{-18}{7}\right)$.

$$\begin{aligned} \text{d) } & \begin{cases} 3x + y = 3 \\ -3y = 5 \\ 3x + y = 3 \\ y = \frac{-5}{3} \\ x = \frac{14}{9} \\ y = \frac{-5}{3}. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $\left(\frac{14}{9}; \frac{-5}{3}\right)$.

❖ **Bài 7.** Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp cộng đại số

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + y = 4 \\ x - y = 2. \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 4x + 5y = 11 \\ 2x - 3y = 0. \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 12x + 18y = -24 \\ -2x - 3y = 4. \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} x - 3y = 5 \\ -2x + 6y = 10. \end{cases}$$

🗨 **Lời giải.**

a) Cộng từng vế hai phương trình của hệ, ta được $3x = 6$. Suy ra $x = 2$.
Thay $x = 2$ vào phương trình thứ hai của hệ, ta được $2 - y = 2$. Do đó $y = 0$.
Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $(2; 0)$.

b) Nhân hai vế của phương trình thứ hai với -2 , ta được $\begin{cases} 4x + 5y = 11 \\ -4x + 6y = 0. \end{cases}$
Cộng từng vế hai phương trình của hệ, ta được $11y = 11$. Suy ra $y = 1$.
Thay $y = 1$ vào phương trình thứ nhất của hệ, ta được $4x + 5 = 11$. Do đó $x = \frac{3}{2}$.
Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $\left(\frac{3}{2}; 1\right)$.

c) Nhân hai vế của phương trình thứ hai với 6 , ta được $\begin{cases} 12x + 18y = -24 \\ -12x - 18y = 24. \end{cases}$
Cộng từng vế hai phương trình của hệ, ta được $0 = 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.
Vậy hệ phương trình có vô số nghiệm.

d) Nhân hai vế của phương trình thứ nhất với 2, ta được
$$\begin{cases} 2x - 6y = 10 \\ -2x + 6y = 10 \end{cases}$$

Cộng từng vế hai phương trình của hệ, ta được $0x = 10$ là phương trình vô nghiệm.
 Vậy hệ phương trình vô nghiệm. □

❖ **Bài 8.** Giải các hệ phương trình:

a)
$$\begin{cases} x + 2y = -2 \\ 5x - 4y = 11. \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 2x - y = -5 \\ -2x + y = 11. \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 3x + y = 2 \\ 6x + 2y = 4. \end{cases}$$

🗨 **Lời giải.**

a) Ta có

$$\begin{aligned} &\begin{cases} x + 2y = -2 \\ 5x - 4y = 11. \end{cases} \\ &\begin{cases} x = -2y - 2 \\ 5(-2y - 2) - 4y = 11 \end{cases} \\ &\begin{cases} x = -2y - 2 \\ -14y = 21 \end{cases} \\ &\begin{cases} x = 1 \\ y = -\frac{3}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -\frac{3}{2}. \end{cases}$$

b) Ta có

$$\begin{aligned} &\begin{cases} 2x - y = -5 \\ -2x + y = 11 \end{cases} \\ &\begin{cases} 2x - (11 + 2x) = -5 \\ y = 11 + 2x \end{cases} \\ &\begin{cases} 2x - 11 - 2x = -5 \\ y = 11 + 2x \end{cases} \\ &\begin{cases} 0x = 16 \\ y = 11 + 2x. \end{cases} \end{aligned}$$

Phương trình $0x = 16$ vô nghiệm.
 Vậy hệ phương trình vô nghiệm.

c) Ta có

$$\begin{aligned} &\begin{cases} 3x + y = 2 \\ 6x + 2y = 4 \end{cases} \\ &\begin{cases} y = 2 - 3x \\ 6x + 2(2 - 3x) = 4 \end{cases} \\ &\begin{cases} y = 2 - 3x \\ 6x + 4 - 6x = 4 \end{cases} \\ &\begin{cases} y = 2 - 3x \\ 0x = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Phương trình $0x = 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Vậy hệ phương trình có vô số nghiệm. Các nghiệm của hệ được viết như sau: $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = 2 - 3x. \end{cases}$

□

❖ **Bài 9.** Giải các hệ phương trình:

$$\text{a) } \begin{cases} 4x + y = 2 \\ \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}y = 1; \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x - y\sqrt{2} = 0 \\ 2x + y\sqrt{2} = 3; \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 5x\sqrt{3} + y = 2\sqrt{2} \\ x\sqrt{6} - y\sqrt{2} = 2; \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} 2(x + y) + 3(x - y) = 4 \\ (x + y) + 2(x - y) = 5. \end{cases}$$

🗨 **Lời giải.**

$$\begin{aligned} \text{a) } & \begin{cases} x + 2y = -2 \\ 5x - 4y = 11 \end{cases} \\ & \begin{cases} x = -2 - 2y \\ 5 \cdot (-2 - 2y) - 4y = 11 \end{cases} \\ & \begin{cases} x = -2 - 2y \\ -10 - 10y - 4y = 11 \end{cases} \\ & \begin{cases} x = -2 - 2y \\ -14y = 21 \end{cases} \\ & \begin{cases} x = -2 - 2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \\ y = -\frac{3}{2} \end{cases} \\ & \begin{cases} x = 1 \\ y = -\frac{3}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $\left(1; -\frac{3}{2}\right)$.

$$\begin{aligned} \text{b) } & \begin{cases} x - y\sqrt{2} = 0 \\ 2x + y\sqrt{2} = 3 \end{cases} \\ & \begin{cases} x = y\sqrt{2} \\ 2 \cdot (y\sqrt{2}) + y\sqrt{2} = 3 \end{cases} \\ & \begin{cases} x = y\sqrt{2} \\ 3 \cdot y\sqrt{2} = 3 \end{cases} \\ & \begin{cases} x = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \sqrt{2} \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \\ & \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $\left(1; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

$$\text{c) } \begin{cases} 5x\sqrt{3} + y = 2\sqrt{2} \\ x\sqrt{6} - y\sqrt{2} = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2\sqrt{2} - 5x\sqrt{3} \\ x\sqrt{6} - (2\sqrt{2} - 5x\sqrt{3}) \cdot \sqrt{2} = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2\sqrt{2} - 5x\sqrt{3} \\ x\sqrt{6} - 4 + 5x\sqrt{6} = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2\sqrt{2} - 5x\sqrt{3} \\ 6x\sqrt{6} = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2\sqrt{2} - 5\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right)\sqrt{3} \\ x = \frac{\sqrt{6}}{6} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ x = \frac{\sqrt{6}}{6} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $\left(\frac{\sqrt{6}}{6}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

d)
$$\begin{cases} 2(x+y) + 3(x-y) = 4 \\ (x+y) + 2(x-y) = 5 \end{cases}$$

Nhân hai vế của phương trình thứ hai với (-1) , ta được

$$\begin{cases} 2(x+y) + 3(x-y) = 4 \\ -(x+y) - 2(x-y) = (-5) \end{cases}$$

Cộng từng vế của phương trình của hệ, ta được $(x+y) + (x-y) = (-1)$ hay $2x = (-1)$. Suy ra $x = -\frac{1}{2}$;

Thay kết quả vừa tìm được vào phương trình thứ hai ta được: $\left(-\frac{1}{2} + y\right) + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2} - y\right) = 5$. Suy ra $y = -\frac{13}{2}$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{13}{2}\right)$.

□

❖ **Bài 10.** Giải các hệ phương trình bằng phương pháp thế

a)
$$\begin{cases} \sqrt{2}x - \sqrt{3}y = 1 \\ x + \sqrt{3}y = \sqrt{2} \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x - 2\sqrt{2}y = \sqrt{5} \\ \sqrt{2}x + y = 1 - \sqrt{10} \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} (\sqrt{2} - 1)x - y = \sqrt{2} \\ x + (\sqrt{2} + 1)y = 1 \end{cases}$$

🗨 **Lời giải.**

a) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{2}x - \sqrt{3}y = 1 & (1) \\ x + \sqrt{3}y = \sqrt{2} & (2) \end{cases}$$

Từ phương trình (2) suy ra $x = \sqrt{2} - \sqrt{3}y$. Thay vào phương trình (1) ta có

$$\sqrt{2}(\sqrt{2} - \sqrt{3}y) - \sqrt{3}y = 1 \Rightarrow y(\sqrt{6} + \sqrt{3}) = 1 \Rightarrow y = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{3}}{3}$$

Khi $y = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{3}}{3}$ thay vào (2) ta có

$$x + \sqrt{3} \cdot \left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{3}}{3}\right) = \sqrt{2} \Rightarrow x + \sqrt{2} - 1 = \sqrt{2} \Rightarrow x = 1.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $\left(1; \frac{\sqrt{6} - \sqrt{3}}{3}\right)$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x - 2\sqrt{2}y = \sqrt{5} & (1) \\ \sqrt{2}x + y = 1 - \sqrt{10} & (2) \end{cases}$

Từ phương trình (1) suy ra $x = \sqrt{5} - 2\sqrt{2}y$. Thay vào phương trình (2) ta có

$$\sqrt{2}(\sqrt{5} - 2\sqrt{2}y) + y = 1 - \sqrt{10} \Rightarrow 5y = 1 - 2\sqrt{10} \Rightarrow y = \frac{1 - 2\sqrt{10}}{5}$$

Khi $y = \frac{1 - 2\sqrt{10}}{5}$ thay vào (1) ta có

$$x = \sqrt{5} + 2\sqrt{2} \cdot \left(\frac{1 - 2\sqrt{10}}{5}\right) \Rightarrow x = \frac{2\sqrt{2} - 3\sqrt{5}}{5}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $\left(\frac{2\sqrt{2} - 3\sqrt{5}}{5}; \frac{1 - 2\sqrt{10}}{5}\right)$.

c) $\begin{cases} (\sqrt{2} - 1)x - y = \sqrt{2} & (1) \\ x + (\sqrt{2} + 1)y = 1 & (2) \end{cases}$

Từ phương trình (1) ta suy ra $y = (\sqrt{2} - 1)x - \sqrt{2}$. Thay vào phương trình (2) ta có

$$x + (\sqrt{2} + 1) \cdot [(\sqrt{2} - 1)x - \sqrt{2}] = 1 \Rightarrow 2x - 2 - \sqrt{2} = 1 \Rightarrow x = \frac{3 + \sqrt{2}}{2}$$

Khi $x = \frac{3 + \sqrt{2}}{2}$ thay vào (2) ta có

$$\frac{3 + \sqrt{2}}{2} + (\sqrt{2} + 1)y = 1 \Rightarrow (\sqrt{2} + 1)y = -\frac{1 + \sqrt{2}}{2} \Rightarrow y = -\frac{1}{2}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(\frac{3 + \sqrt{2}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

□

❖ **Bài 11.** Giải các hệ phương trình bằng phương pháp thế

a) $\begin{cases} x + \sqrt{5}y = 0 & (1) \\ \sqrt{5}x + 3y = 1 - \sqrt{5} & (2) \end{cases}$

b) $\begin{cases} (2 - \sqrt{3})x - 3y = 2 + 5\sqrt{3} & (1) \\ 4x + y = 4 - 2\sqrt{3} & (2) \end{cases}$

🗨 **Lời giải.**

a) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + \sqrt{5}y = 0 & (1) \\ \sqrt{5}x + 3y = 1 - \sqrt{5} & (2) \end{cases}$

Xét phương trình (1) suy ra $x = -\sqrt{5}y$. Thay vào phương trình (2) ta có

$$\sqrt{5} \cdot (-\sqrt{5}y) + 3y = 1 - \sqrt{5} \Rightarrow -2y = 1 - \sqrt{5} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

Khi $y = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ suy ra $x = (-\sqrt{5}) \cdot \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{5} - 5}{2}$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $\left(\frac{\sqrt{5} - 5}{2}; \frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)$

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} (2 - \sqrt{3})x - 3y = 2 + 5\sqrt{3} & (1) \\ 4x + y = 4 - 2\sqrt{3} & (2) \end{cases}$

Từ phương trình (2) ta suy ra $y = 4 - 2\sqrt{3} - 4x$. Thay vào phương trình (1) ta có

$$(2 - \sqrt{3})x - 3(4 - 2\sqrt{3} - 4x) = 2 + 5\sqrt{3} \Rightarrow (14 - \sqrt{3})x = 14 - \sqrt{3} \Rightarrow x = 1$$

Khi $x = 1$ suy ra $y = -2\sqrt{3}$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(1; -2\sqrt{3})$.

❖ **Bài 12.** Dùng MTCT thích hợp để tìm nghiệm của các hệ phương trình sau

$$\text{a) } \begin{cases} 12x - 5y + 24 = 0 \\ -5x - 3y - 10 = 0; \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \frac{1}{3}x - y = \frac{2}{3} \\ x - 3y = 2; \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ -x + \frac{2}{3}y = 0; \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} \frac{4}{9}x - \frac{3}{5}y = 11 \\ \frac{2}{9}x + \frac{1}{5}y = -2. \end{cases}$$

🗨 **Lời giải.**

a) $x = -2; y = 0.$

b) Hệ phương trình có vô số nghiệm.

c) Hệ phương trình vô nghiệm.

d) $x = \frac{9}{2}; y = -15.$

❖ **Bài 13.** Tìm nghiệm của các hệ phương trình sau bằng máy tính cầm tay:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x - y = 4 \\ 3x + 5y = -19. \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} -3x + 5y = 12 \\ 2x + y = 5. \end{cases}$$

🗨 **Lời giải.**

Sử dụng máy tính cầm tay, ta giải được nghiệm của các hệ phương trình sau là

a) Hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $\left(\frac{1}{13}; -\frac{50}{13}\right).$

b) Hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $(1; 3).$

❖ **Bài 14.** Cho hệ phương trình $\begin{cases} 2x - y = -3 \\ -2m^2x + 9y = 3(m+3) \end{cases}$, trong đó m là số đã cho. Giải hệ phương trình trong mỗi trường hợp sau

a) $m = -2;$

b) $m = -3;$

c) $m = 3.$

🗨 **Lời giải.**

a) Thay $m = -2$, ta có hệ $\begin{cases} 2x - y = -3 \\ -8x + 9y = 3 \end{cases}.$

Từ phương trình thứ nhất của hệ ta có $y = 2x + 3$. Thế vào phương trình thứ hai của hệ, ta được $-8x + 9(2x + 3) = 3$ hay $10x + 27 = 3$, suy ra $x = -\frac{12}{5}$.

Từ đó $y = 2 \cdot \left(-\frac{12}{5}\right) + 3 = -\frac{9}{5}$. Vậy hệ phương trình có nghiệm là $\left(-\frac{12}{5}; -\frac{9}{5}\right).$

b) Thay $m = -3$, ta có hệ $\begin{cases} 2x - y = -3 \\ -18x + 9y = 0 \end{cases}.$

Từ phương trình thứ nhất của hệ ta có $y = 2x + 3$. Thế vào phương trình thứ hai của hệ, ta được $-18x + 9(2x + 3) = 0$ hay $0x + 27 = 0$ (1)

Do không có giá trị nào của x thỏa mãn hệ thức (1) nên hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

c) Thay $m = 3$, ta có hệ
$$\begin{cases} 2x - y = -3 \\ -18x + 9y = 18 \end{cases}.$$

Từ phương trình thứ nhất của hệ ta có $y = 2x + 3$. Thế vào phương trình thứ hai của hệ, ta được $-18x + 9(2x + 3) = 18$ hay $0x = 0$. (1)

Ta thấy mọi giá trị của x đều thoả mãn (1).

Với giá trị tùy ý của x thì giá trị tương ứng của y được tính bởi phương trình $y = 2x + 3$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x, 2x + 3)$ với $x \in \mathbb{R}$ tùy ý.

□

❖ **Bài 15.** Xác định a, b để đồ thị hàm số $y = ax + b$ đi qua hai điểm A và B trong mỗi trường hợp sau:

a) $A(2; 1)$ và $B(4; -2)$;

b) $A(1; 2)$ và $B(3; 8)$.

🗨 **Lời giải.**

a) Đồ thị đi qua $A(2; 1)$ nên ta có $1 = 2a + b$.

Đồ thị đi qua $B(4; -2)$ nên ta có $-2 = 4a + b$.

Ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} 2a + b = 1 \\ 4a + b = -2 \end{cases}.$$

Giải hệ phương trình ta được $a = -\frac{3}{2}$ và $b = 4$.

Vậy đồ thị hàm số đó là $y = -\frac{3}{2}x + 4$.

b) Đồ thị đi qua $A(1; 2)$ nên ta có $2 = a + b$.

Đồ thị đi qua $B(3; 8)$ nên ta có $8 = 3a + b$.

Ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} a + b = 2 \\ 3a + b = 8 \end{cases}.$$

Giải hệ phương trình ta được $a = 3$ và $b = -1$.

Vậy đồ thị hàm số đó là $y = 3x - 1$.

□

❖ **Bài 16.** Xác định a, b để đồ thị của hàm số $y = ax + b$ đi qua hai điểm A, B trong mỗi trường hợp sau

a) $A(1; -2)$ và $B(-2; -11)$;

b) $A(2; 8)$ và $B(-4; 5)$.

🗨 **Lời giải.**

a) Gọi đồ thị của hàm số $y = ax + b$ là d .

Ta có $\begin{cases} A \in d \\ B \in d \end{cases}$ nên $\begin{cases} -2 = a + b \\ -11 = -2a + b \end{cases}$

$$\begin{cases} b = -2 - a \\ -11 = -2a - 2 - a \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -2 - a \\ -3a = -9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 3 \\ b = -5 \end{cases}.$$

b) Gọi đồ thị của hàm số $y = ax + b$ là d .

Ta có $\begin{cases} A \in d \\ B \in d \end{cases}$ nên $\begin{cases} 8 = 2a + b \\ 5 = -4a + b \end{cases}$

$$\begin{cases} b = 8 - 2a \\ 5 = -4a + 8 - 2a \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 8 - 2a \\ -6a = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 7 \end{cases}.$$

□

❖ **Bài 17.** Giải các hệ phương trình sau

a)
$$\begin{cases} 6(x + y) = 8 + 2x - 3y \\ 5(y - x) = 5 + 3x + 2y; \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} (x - 2)(y + 1) = xy \\ (x + 8) \cdot (y - 2) = xy. \end{cases}$$

🗨 **Lời giải.**

a) Hệ phương trình được biến đổi thành
$$\begin{cases} 4x + 9y = 8 \\ 8x - 3y = -5. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được nghiệm $\left(-\frac{1}{4}; 1\right)$.

b) Hệ phương trình được biến đổi thành
$$\begin{cases} x - 2y = 2 \\ x - 4y = -8. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được nghiệm $(12; 5)$.

□

❖ **Bài 18.** Giải các hệ phương trình sau

a)
$$\begin{cases} \frac{7}{x+2} + \frac{3}{y} = 2 \\ \frac{1}{x+2} - \frac{1}{y} = \frac{5}{2}; \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} \sqrt{3x-1} - \sqrt{2y+1} = 1 \\ 2\sqrt{3x-1} + 3\sqrt{2y+1} = 12. \end{cases}$$

🗨 **Lời giải.**

a) Đặt $\frac{1}{x+2} = u; \frac{1}{y} = v$. Hệ phương trình có dạng
$$\begin{cases} 7u + 3v = 2 \\ 4u - v = \frac{5}{2}. \end{cases}$$

Giải hệ ta được
$$\begin{cases} u = \frac{1}{2} \\ v = -\frac{1}{2} \end{cases}, \text{ suy ra } \begin{cases} x+2 = 2 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -2. \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(0; -2)$.

b) Đặt $\sqrt{3x-1} = u \geq 0; \sqrt{2y+1} = v \geq 0$. Hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} u - v = 1 \\ 2u + 3v = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 3 \\ v = 2. \end{cases}$$

Do đó
$$\begin{cases} \sqrt{3x-1} = 3 \\ \sqrt{2y+1} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{10}{3} \\ y = \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ là $\left(\frac{10}{3}; \frac{3}{2}\right)$.

□

❖ **Bài 19.** Giải các hệ phương trình sau

a)
$$\begin{cases} (x-1)(y-2) = (x+1)(y-3) \\ (x-5)(y+4) = (x-4)(y+1) \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} \frac{1}{2}(x+2)(y+3) = \frac{1}{2}xy + 50 \\ \frac{1}{2}(x-2)(y-2) = \frac{1}{2}xy - 32 \end{cases}$$

🗨 **Lời giải.**

a) Hệ phương trình được biến đổi thành
$$\begin{cases} x - 2y = -5 \\ 3x - y = 16. \end{cases}$$

Giải ra ta được nghiệm của hệ là $\left(7\frac{2}{5}; 6\frac{1}{5}\right)$.

b) Hệ phương trình được biến đổi thành
$$\begin{cases} 3x + 2y = 94 \\ x + y = 34. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được nghiệm là
$$\begin{cases} x = 26 \\ y = 8. \end{cases}$$

□

🔗 **Bài 20.** Giải các hệ phương trình sau

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} \sqrt{x-2} + \sqrt{y-3} = 3 \\ 2\sqrt{x-2} - 3\sqrt{y-3} = -4 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} \frac{3x}{x+1} + \frac{2}{y+4} = 4 \\ \frac{2x}{x+1} - \frac{5}{y+4} = 9 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} 2(x^2 - 2x) + \sqrt{y+1} = 0 \\ 3(x^2 - 2x) - 2\sqrt{y+1} + 7 = 0 \end{cases} \end{array}$$

🗨 **Lời giải.**

a) Đặt $\sqrt{x-2} = u \geq 0$; $\sqrt{y-3} = v \geq 0$.

Hệ phương trình có dạng $\begin{cases} u + v = 3 \\ 2u - 3v = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = 2 \end{cases}$ thỏa mãn.

Suy ra $\begin{cases} \sqrt{x-2} = 1 \\ \sqrt{y-3} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 7 \end{cases}$.

Vậy nghiệm của hệ là $(3; 7)$.

b) Đặt $\frac{x}{x+1} = u$; $\frac{1}{y+4} = v$.

Hệ phương trình có dạng $\begin{cases} 3u + 2v = 4 \\ 2u - 5v = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 2 \\ v = -1 \end{cases}$.

Suy ra $\begin{cases} \frac{x}{x+1} = 2 \\ \frac{1}{y+4} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -5 \end{cases}$.

Vậy nghiệm của hệ là $(-2; -5)$.

c) Đặt $(x-1)^2 = u \geq 0$; $\sqrt{y+1} = v \geq 0$.

Hệ phương trình có dạng $\begin{cases} 2u + v = 2 \\ 3u - 2v = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 0 \\ v = 2 \end{cases}$.

Suy ra $\begin{cases} (x-1)^2 = 0 \\ \sqrt{y+1} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$.

Vậy nghiệm của hệ là $(1; 3)$.

□

🔗 **Bài 21.** Xác định tọa độ giao điểm của hai đường thẳng

a) $(d) : y = x - 2$ và $(d') : y = 2x + 1$;

b) $(d) : x + y + 1 = 0$ và $(d') : x - 2y + 4 = 0$;

c) $(d) : x - 3y + 5 = 0$ và $(d') : 2x + y - 18 = 0$.

🗨 **Lời giải.**

Tọa độ giao điểm M của (d) và (d') là

a) $M(-3; -5)$;

b) $M(-2; 1)$;

c) $M(7; 4)$.

□

🔗 **Bài 22.** Cho ba đường thẳng

$$(d_1) : x - 2y = -3;$$

$$(d_2) : \sqrt{2} \cdot x + y = \sqrt{2} + 2;$$

$$(d_m) : mx - (1 - 2m)y = 5 - m.$$

Xác định tham số m để ba đường thẳng đồng quy.

Lời giải.

Tọa độ giao điểm của (d_1) và (d_2) là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x - 2y = -3 \\ \sqrt{2} \cdot x + y = \sqrt{2} + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2. \end{cases}$$

Vậy tọa độ giao điểm của (d_1) và (d_2) là $M(1; 2)$.

Để ba đường thẳng đồng quy thì $M \in (d_m)$ hay

$$m - (1 - 2m) \cdot 2 = 5 - m \Rightarrow m = \frac{7}{6}.$$

Vậy với $m = \frac{7}{6}$ thì ba đường thẳng đồng quy. □

❖ **Bài 23.** Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx + 4y = 10 - m \\ x + my = 4. \end{cases}$

- Xác định các giá trị nguyên của m để hệ có nghiệm duy nhất $(x; y)$ sao cho $x > 0, y > 0$.
- Tìm giá trị nguyên của m để hệ có nghiệm $(x; y)$ với x, y là số nguyên dương.

Lời giải.

- Điều kiện để hệ có nghiệm duy nhất là $m \neq \pm 2$. Khi đó hệ có nghiệm $\left(\frac{8-m}{2+m}; \frac{5}{2+m}\right)$. Mặt khác, theo

$$\text{điều kiện } x > 0, y > 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{8-m}{2+m} > 0 \\ \frac{5}{2+m} > 0 \end{cases} \Rightarrow -2 < m < 8.$$

$$\text{Với } m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-1; 0; 1; 2; \dots; 7\}.$$

- $m = \{-1; 3\}$. □

❖ **Bài 24.** Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx - y = 3 \\ 2x + my = 9. \end{cases}$

- Giải hệ phương trình khi $m = 1$;
- Tìm giá trị nguyên của m để hệ có nghiệm duy nhất $(x; y)$ sao cho biểu thức $A = 3x - y$ nhận giá trị nguyên.

Lời giải.

- Khi $m = 1$ hệ phương trình có dạng $\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + y = 9. \end{cases}$

Giải hệ phương trình ta được nghiệm là $(4; 1)$.

- Với mọi m hệ luôn có nghiệm $\begin{cases} x = \frac{3m+9}{m^2+2} \\ y = \frac{9m-6}{m^2+2}. \end{cases}$

$$\bullet \text{ Xét } A = 3x - y = \frac{33}{m^2+2}.$$

Để $A \in \mathbb{Z} \Rightarrow m^2 + 2 \in \mathcal{U}(33)$ mà $m^2 + 2 \geq 2; m \in \mathbb{Z}$.

Suy ra $m \in \{1; -1; 3; -3\}$. □

❖ **Bài 25.** Với giá trị nào của m thì hai phương trình sau có nghiệm chung

$$mx^2 + x + 1 = 0 \quad \text{và} \quad x^2 + mx + 1 = 0$$

🗨 **Lời giải.**

Để thỏa mãn bài toán khi hệ phương trình $\begin{cases} mx^2 + x + 1 = 0 \\ x^2 + mx + 1 = 0 \end{cases}$ có nghiệm.

Mà

$$\begin{aligned} \begin{cases} mx^2 + x + 1 = 0 \\ x^2 + mx + 1 = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} mx^2 + x + 1 = 0 \\ mx^2 + x - x^2 - mx = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} mx^2 + x + 1 = 0 \\ x^2(m-1) + x(1-m) = 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} mx^2 + x + 1 = 0 \\ (m-1)(x^2 - x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} mx^2 + x + 1 = 0 & (*) \\ \begin{cases} m-1 = 0 \\ x^2 - x = 0 \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

- Khi $m-1=0 \Rightarrow m=1$ thay vào (*) suy ra $x^2 + x + 1 = 0$. Dễ thấy phương trình vô nghiệm.

- Khi $x^2 - x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$.

+ Khi $x=0$ thay vào (*) không thỏa mãn.

+ Khi $x=1$ thay vào (*) suy ra $m+2=0 \Rightarrow m=-2$. Giá trị của $m=-2$ □

❖ **Bài 26.** Cho một số gồm hai chữ số. Nếu đổi chỗ hai chữ số của nó ta được số mới hơn số cũ là 45. Tổng của số đã cho và một số mới tạo thành là 77. Tìm số đã cho.

🗨 **Lời giải.**

Gọi chữ số hàng chục là x , chữ số hàng đơn vị là y .

Điều kiện: $0 < x, y \leq 9; x, y \in \mathbb{N}$.

Theo đề bài ta có hệ phương trình $\begin{cases} 10y + x = 10x + y + 45 \\ 10x + y + 10y + x = 77 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 6 \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy số đã cho là 16. □

❖ **Bài 27.** Tìm hai số tự nhiên biết tổng của chúng là 100 và số lớn hơn số bé là 20.

🗨 **Lời giải.**

Gọi số lớn là x , số bé là y ($x, y \in \mathbb{N}$).

Theo đề bài ta có hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 100 \\ x - y = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 60 \\ y = 40 \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy hai số tự nhiên là 60, 40. □

❖ **Bài 28.** Tìm số tự nhiên N có hai chữ số, biết rằng tổng của hai chữ số đó bằng 12, và nếu viết hai chữ số đó theo thứ tự ngược lại thì được một số lớn hơn N là 36 đơn vị.

🗨 **Lời giải.**

Gọi số tự nhiên cần tìm có dạng là $\overline{ab}$.

Tổng hai chữ số đó bằng 12 nên $a + b = 12$.

Viết hai chữ số đó theo thứ tự ngược lại thì được một số lớn hơn N là 36 đơn vị nên $10b + a - 10a - b = 36$ hay $-9a + 9b = 36$.

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} a + b = 12 \\ -9a + 9b = 36 \end{cases}$. Suy ra $\begin{cases} a = 4 \\ b = 8 \end{cases}$.

Vậy số tự nhiên cần tìm là 48. □

❖ **Bài 29.** Hai người thợ cùng làm công việc trong 16 giờ thì xong. Nếu người thứ nhất làm một mình trong 15 giờ rồi người thứ hai làm tiếp 6 giờ thì hoàn thành được 75% công việc. Hỏi mỗi người làm công việc đó

một mình hoàn thành trong bao lâu?

Lời giải.

Gọi thời gian người thứ nhất làm một mình hoàn thành công việc là x (giờ; $x > 0$); người thứ hai làm một mình hoàn thành công việc là y (giờ; $y > 0$).

Theo đề bài ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{16} \\ \frac{15}{x} + \frac{6}{y} = 75\% \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 24 \\ y = 48 \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Vậy nếu làm riêng thì người thứ nhất hoàn thành công việc trong 24 giờ; người thứ hai hoàn thành công việc trong 48 giờ. □

❖ **Bài 30.** Theo kế hoạch hai tổ sản xuất 600 sản phẩm trong một thời gian nhất định. Do áp dụng kĩ thuật mới nên tổ I đã vượt mức 18% và tổ II đã vượt mức 21%. Vì vậy trong thời gian quy định họ đã hoàn thành vượt mức 120 sản phẩm. Hỏi số sản phẩm được giao của mỗi tổ theo kế hoạch?

Lời giải.

Gọi số sản phẩm tổ I được giao là x (sản phẩm; $x \in \mathbb{N}$) và số sản phẩm tổ II được giao là y (sản phẩm; $y \in \mathbb{N}$).

Theo đề bài ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y = 600 \\ \frac{180x}{100} + \frac{21y}{100} = 120 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 200 \\ y = 400 \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Vậy sản phẩm tổ I được giao là 200 sản phẩm; tổ II được giao là 400 sản phẩm. □

❖ **Bài 31.** Để hoàn thành một công việc, hai tổ phải làm chung trong 6 giờ. Sau 2 giờ làm chung thì tổ hai được điều đi làm việc khác, tổ một đã hoàn thành công việc còn lại trong 10 giờ. Hỏi nếu mỗi tổ làm riêng thì sau bao lâu sẽ làm xong công việc đó?

Lời giải.

Gọi thời gian tổ I làm một mình hoàn thành công việc là x (giờ; $x > 0$) và tổ II làm một mình hoàn thành công việc là y (giờ; $y > 0$).

Theo đề bài ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6} \\ 2 \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) + \frac{10}{x} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 15 \\ y = 10 \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$
 □

❖ **Bài 32.** Một ca nô đi xuôi dòng một quãng đường 42 km hết 1 giờ 30 phút và ngược dòng quãng đường đó hết 2 giờ 6 phút. Tính tốc độ của ca nô khi nước yên lặng và tốc độ của dòng nước. Biết rằng tốc độ của ca nô khi nước yên lặng không đổi trên suốt quãng đường và tốc độ của dòng nước cũng không đổi khi ca nô chuyển động.

Lời giải.

Gọi a (km/h) là tốc độ dòng nước và b (km/h) là tốc độ của ca nô khi nước yên lặng ($x, y > 0$)

Khi đó, tốc đi xuôi dòng là $a + b$ và tốc độ đi ngược dòng là $b - a$.

Thời gian đi xuôi dòng là 1 giờ 30 phút, tức 1,5 giờ nên

$$1,5 \cdot (a + b) = 42 \text{ hay } a + b = 28. \quad (1)$$

Thời gian đi ngược dòng là 2 giờ 6 phút, tức 2,1 giờ nên

$$2,1 \cdot (b - a) = 42 \text{ hay } -a + b = 20. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} a + b = 28 \\ -a + b = 20 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình, ta được
$$\begin{cases} x = 4 \\ y = 24 \end{cases}$$

Vậy tốc độ của dòng nước là 4 km/h và tốc độ của ca nô khi nước yên lặng là 24 km/h. □

❖ **Bài 33.** Một ca nô xuôi dòng 81 km và ngược dòng 42 km mất 5 giờ. Một lần khác, ca nô xuôi dòng 9 km và ngược dòng 7 km thì mất 40 phút. Tính vận tốc riêng của ca nô và vận tốc dòng nước. (Biết vận tốc riêng của ca nô; vận tốc của dòng nước không đổi).

💡 **Lời giải.**

Gọi vận tốc riêng của ca nô là x (km/h; $x > 0$) và vận tốc dòng nước là y (km/h; $x > y > 0$).

Theo đề bài ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{81}{x+y} + \frac{42}{x-y} = 5 \\ \frac{9}{x+y} + \frac{7}{x-y} = \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Đặt $u = \frac{1}{x+y}$; $v = \frac{1}{x-y}$, ta có
$$\begin{cases} 81u + 42v = 5 \\ 9u + 7v = \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Giải hệ ta được
$$\begin{cases} u = \frac{1}{27} \\ v = \frac{1}{21} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y = 27 \\ x-y = 21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 24 \\ y = 3 \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

□

❖ **Bài 34.** Một ô tô đi từ Hà Nội và dự định đến Huế lúc 20h 30 phút. Nếu xe đi với vận tốc 45 km/h thì sẽ đến Huế chậm hơn so với dự định là 2 giờ. Nếu xe chạy với vận tốc 60 km/h thì sẽ đến Huế sớm hơn 2 giờ so với dự định. Tính độ dài quãng đường Hà Nội - Huế và thời gian xe xuất phát từ Hà Nội.

💡 **Lời giải.**

Gọi quãng đường Hà Nội - Huế là x (km; $x > 0$) và thời gian ô tô dự định đi là y (giờ; $y > 0$).

Theo đề bài ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} x = 60 \cdot (y - 2) \\ x = 45 \cdot (y + 2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 720 \\ y = 14 \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Vậy quãng đường Hà Nội - Huế là 720 km và thời gian xe xuất phát từ Hà Nội là

$$20 \text{ giờ } 30 \text{ phút} - 14 \text{ giờ} = 6 \text{ giờ } 30 \text{ phút}.$$

□

❖ **Bài 35.** Một trường tổ chức cho học sinh đi tham quan bằng ô tô. Nếu xếp mỗi xe 40 học sinh thì còn thừa 5 học sinh. Nếu xếp mỗi xe 41 học sinh thì xe cuối cùng còn thiếu 3 học sinh. Hỏi có bao nhiêu học sinh đi tham quan và có bao nhiêu ô tô?

💡 **Lời giải.**

Gọi số học sinh đi tham quan là x (người, $x \in \mathbb{N}^*$) và số ô tô là y (ô tô, $y \in \mathbb{N}^*$).

Theo đề bài ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} x = 40y + 5 \\ x = 41y - 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 325 \\ y = 8 \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Vậy số học sinh đi tham quan là 325 em và số ô tô là 8.

□

❖ **Bài 36.** Cho một hình chữ nhật. Nếu tăng độ dài mỗi cạnh của nó lên 1 cm thì diện tích của hình chữ nhật sẽ tăng thêm 13 cm^2 . Nếu giảm chiều dài đi 2 cm, chiều rộng đi 1 cm thì diện tích của hình chữ nhật sẽ giảm đi 15 cm^2 . Tính chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật.

💡 **Lời giải.**

Gọi chiều dài hình chữ nhật là x (cm; $x > 0$) và chiều rộng là y (cm; $y > 0$).

Theo đề bài ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} (x+1) \cdot (y+1) = xy + 13 \\ (x-2) \cdot (y-1) = xy - 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 5 \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Vậy chiều dài của hình chữ nhật là 7 cm; chiều rộng là 5 cm.

□

❖ **Bài 37.** Điểm số trung bình của một vận động viên bắn súng sau 100 lần bắn là 8,69 điểm. Kết quả cụ thể được ghi trong bảng sau, trong đó có hai ô bị mờ không đọc được (đánh dấu "?"):

Điểm số của mỗi lần bắn	10	9	8	7	6
Số lần bắn	25	42	?	15	?

🗨️ Lời giải.

Gọi x, y lần lượt là số lần bắn được 8 điểm và 6 điểm.

Vận động viên thực hiện 100 lần bắn nên $25 + 42 + x + 15 + y = 100$, tức $x + y = 18$.

Điểm số trung bình sau 100 lần bắn là 8,69 điểm nên

$$\frac{25 \cdot 10 + 42 \cdot 9 + x \cdot 8 + 15 \cdot 7 + y \cdot 6}{100} = 8,69.$$

Suy ra $8x + 6y = 136$.

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 18 \\ 8x + 6y = 136 \end{cases}$. Suy ra $\begin{cases} x = 14 \\ y = 4. \end{cases}$

Vậy số lần bắn được 8 điểm là 14 lần và số lần bắn được 6 điểm là 4 lần. □

🔗 **Bài 38.** Năm ngoái, hai đơn vị sản xuất nông nghiệp thu hoạch được 3600 tấn thóc. Năm nay, hai đơn vị thu hoạch được 4095 tấn thóc. Hỏi năm nay, mỗi đơn vị thu hoạch được bao nhiêu tấn thóc, biết rằng năm nay, đơn vị thứ nhất làm vượt mức 15%, đơn vị thứ hai làm vượt mức 12% so với năm ngoái? Hãy dùng máy tính cầm tay để kiểm tra lại kết quả thu được.

🗨️ Lời giải.

Gọi x, y lần lượt là số tấn thóc mỗi đơn vị thu hoạch được trong năm nay.

Năm nay, hai đơn vị thu hoạch được 4095 tấn thóc nên $x + y = 4095$.

Vì năm nay, đơn vị thứ nhất làm vượt mức 15%, đơn vị thứ hai làm vượt mức 12% so với năm ngoái nên lượng thóc thu hoạch được ở năm ngoái của mỗi đơn vị lần lượt là $\frac{x}{115\%}$ và $\frac{y}{112\%}$.

Do đó $\frac{x}{115\%} + \frac{y}{112\%} = 3600$.

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 4095 \\ \frac{x}{115\%} + \frac{y}{112\%} = 3600 \end{cases}$. Suy ra $\begin{cases} x = 2415 \\ y = 1680. \end{cases}$

Vậy năm nay đơn vị thứ nhất thu hoạch được 2415 tấn thóc và đơn vị thứ hai thu hoạch được 1680 tấn thóc. □

🔗 **Bài 39.** Hai người thợ cùng làm một công việc trong 16 giờ thì xong. Nếu người thứ nhất làm trong 3 giờ và người thứ hai làm trong 6 giờ thì chỉ hoàn thành được 25% công việc. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi người hoàn thành công việc trong bao lâu?

🗨️ Lời giải.

Gọi x, y (giờ) lần lượt là thời gian mỗi người hoàn thành công việc nếu làm riêng một mình.

Trong một giờ, người thứ nhất làm được $\frac{1}{x}$ (công việc) và người thứ hai làm được $\frac{1}{y}$ (công việc).

Hai người cùng làm thì sau 16 giờ thì xong công việc nên $\frac{16}{x} + \frac{16}{y} = 1$.

Nếu người thứ nhất làm trong 3 giờ và người thứ hai làm trong 6 giờ thì chỉ hoàn thành được 25% công việc nên $\frac{3}{x} + \frac{6}{y} = \frac{1}{4}$.

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} \frac{16}{x} + \frac{16}{y} = 1 \\ \frac{3}{x} + \frac{6}{y} = \frac{1}{4} \end{cases}$.

Đặt ẩn phụ $u = \frac{1}{x}$ và $v = \frac{1}{y}$, ta đưa về hệ phương trình $\begin{cases} 16u + 16v = 1 \\ 3u + 6v = \frac{1}{4} \end{cases}$.

Giải hệ phương trình ta được $\begin{cases} u = \frac{1}{24} \\ v = \frac{1}{48} \end{cases}$, tức là $\begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{1}{24} \\ \frac{1}{y} = \frac{1}{48} \end{cases}$. Suy ra $\begin{cases} x = 24 \\ y = 48. \end{cases}$

Vậy nếu làm riêng thì người thứ nhất hoàn thành xong công việc trong 24 giờ và người thứ hai hoàn thành công việc trong 48 giờ. $\square$

❖ **Bài 40.** Bác Phương chia số tiền 800 triệu đồng của mình cho hai khoản đầu tư. Sau một năm, tổng số tiền lãi thu được là 54 triệu đồng. Lãi suất cho khoản đầu tư thứ nhất là 6% năm và khoản đầu tư thứ hai là 8% năm. Tính số tiền bác Phương đầu tư cho mỗi khoản.

🗨 **Lời giải.**

Gọi x, y lần lượt là số tiền hai khoản đầu tư của bác Phương ($x, y > 0$).

Tổng số tiền của bác Phương ban đầu là 800 triệu đồng, nên ta có phương trình

$$x + y = 800. \quad (1)$$

Lãi suất cho khoản đầu tư thứ nhất là 6% năm và khoản đầu tư thứ hai là 8% năm, nên ta có phương trình

$$0,06 \cdot x + 0,08 \cdot y = 54 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 800 \\ 0,06 \cdot x + 0,08 \cdot y = 54. \end{cases}$

Giải hệ phương trình ta được $\begin{cases} x = 500 \\ y = 300 \end{cases}$ (thỏa mãn).

Vậy bác Phương đầu tư cho khoản thứ nhất và thứ hai lần lượt là 500 triệu đồng và 300 triệu đồng. $\square$

❖ **Bài 41.** Nhân dịp ngày Giỗ Tổ Hùng Vương, một siêu thị điện máy đã giảm giá nhiều mặt hàng để kích cầu mua sắm. Giá niêm yết của một chiếc tủ lạnh và một chiếc máy giặt có tổng số tiền là 25,4 triệu đồng. Tuy nhiên, trong dịp này tủ lạnh giảm 40% giá niêm yết và máy giặt giảm 25% giá niêm yết. Vì thế, cô Liên đã mua hai mặt hàng trên với tổng số tiền là 16,77 triệu đồng. Hỏi giá niêm yết của mỗi mặt hàng trên là bao nhiêu?

🗨 **Lời giải.**

Gọi x, y là giá trị của tủ lạnh và máy giặt khi chưa giảm giá ($x, y > 0$).

Tổng số tiền của một chiếc tủ lạnh và một chiếc máy giặt trước khi giảm giá là 25,4, nên ta có phương trình

$$x + y = 25,4. \quad (1)$$

Tổng số tiền của một chiếc tủ lạnh và một chiếc máy lạnh sau khi được giảm là 16,77, nên ta có phương trình

$$0,6 \cdot x + 0,75 \cdot y = 16,77. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 25,4 \\ 0,6 \cdot x + 0,75 \cdot y = 16,77. \end{cases}$

Giải hệ phương trình ta được $\begin{cases} x = 12,5 \\ y = 10,2 \end{cases}$ (thỏa mãn). $\square$

❖ **Bài 42.** Trong tháng thứ nhất, hai tổ sản xuất được 800 chi tiết máy. So với tháng thứ nhất, trong tháng thứ hai, tổ một sản xuất vượt 15%, tổ hai sản xuất vượt 20% nên trong tháng này, cả hai tổ đã sản xuất được 945 chi tiết máy. Hỏi trong tháng thứ nhất, mỗi tổ sản xuất được bao nhiêu chi tiết máy?

🗨 **Lời giải.**

Gọi số chi tiết máy mà tổ 1 sản xuất được trong tháng đầu là x (chi tiết máy).

Số chi tiết máy mà tổ 2 sản xuất được trong tháng đầu là y (chi tiết máy).

Điều kiện: $x, y < 800$ và $x, y \in \mathbb{N}^*$.

Trong tháng đầu hai tổ công nhân sản xuất được 800 chi tiết máy nên ta có phương trình $x + y = 800$. Sang tháng thứ hai tổ một vượt mức 15%, tổ hai sản xuất vượt mức 20%, do đó cuối tháng cả hai tổ sản xuất được 945 chi tiết máy nên ta có phương trình $115\%x + 120\%y = 945$ hay $1,15x + 1,2y = 945$.

Ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + y = 800 \\ 1,15x + 1,2y = 945. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được
$$\begin{cases} x = 300 \\ y = 500 \end{cases}$$
 (thỏa mãn).

Vậy trong tháng đầu tổ một sản xuất được 300 chi tiết máy, tổ hai sản xuất được 500 chi tiết máy. □

🔗 **Bài 43.** Hai tổ sản xuất cùng may một loại áo khoác xuất khẩu. Nếu tổ thứ nhất may trong 7 ngày và tổ thứ hai may trong 5 ngày thì cả hai tổ may được 1540 chiếc áo. Biết rằng trong mỗi ngày tổ thứ hai may được nhiều hơn tổ thứ nhất 20 chiếc áo. Hỏi trong một ngày mỗi tổ may được bao nhiêu chiếc áo? (Năng suất may áo của mỗi tổ trong các ngày là như nhau.)

🗨 **Lời giải.**

Gọi a, b lần lượt là số áo may của tổ thứ nhất và tổ thứ hai ($a, b \in \mathbb{N}^*$). Nếu tổ thứ nhất may trong 7 ngày và tổ thứ hai may trong 5 ngày thì cả hai tổ may được 1540 chiếc áo, ta có phương trình $7a + 5b = 1540$. Biết rằng trong mỗi ngày tổ thứ hai may được nhiều hơn tổ thứ nhất 20 chiếc áo, ta có phương trình $b - a = 20$ hay $-a + b = 20$.

Ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} 7a + 5b = 1540 \\ -a + b = 20. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình, ta được $a = 120, b = 140$ (thỏa mãn).

Vậy tổ thứ nhất may được 120 áo, tổ hai may được 140 áo. □

🔗 **Bài 44.** Trên mỗi cánh đồng, người ta cấy 60 ha lúa giống mới và 40 ha lúa giống cũ, thu hoạch được tất cả 660 tấn thóc. Hỏi năng suất lúa giống mới trên 1 ha bằng bao nhiêu? Biết rằng 3 ha trồng lúa giống mới thu hoạch được ít hơn 4 ha trồng lúa giống cũ là 3 tấn.

🗨 **Lời giải.**

Gọi x, y lần lượt là năng suất lúa giống mới và lúa giống cũ trên 1 ha ($x \in \mathbb{N}^*, y \in \mathbb{N}^*$). Người ta cấy 60 ha lúa giống mới và 40 ha lúa giống cũ, thu hoạch được tất cả 660 tấn thóc, nên ta có phương trình

$$60x + 40y = 660. \quad (1)$$

Người ta thấy 3 ha trồng lúa mới thu hoạch ít hơn 4 ha trồng giống lúa cũ là 3 tấn, nên ta có phương trình

$$4y - 3x = 3. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} 60x + 40y = 660 \\ -3x + 4y = 3. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được
$$\begin{cases} x = 11 \\ y = 9 \end{cases}$$
 (thỏa mãn).

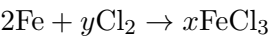
Vậy năng suất lúa giống mới là 11 ha và lúa giống cũ là 9 ha. □

🔗 **Bài 45.** Tìm các hệ số x, y để cân bằng mỗi phương trình phản ứng hoá học sau



🗨 **Lời giải.**

a) Gọi x, y lần lượt là hệ số của Fe và Cl_2 thỏa mãn cân bằng phương trình hóa học

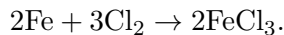


Cân bằng số nguyên tử Fe và số nguyên tử Cl₂ ở hai vế ta được hệ

$$\begin{cases} 2 = x \\ 2y = 3x. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này ta được $x = 2$ và $y = 3$.

Đưa các hệ số tìm được vào phương trình hóa học, ta có



b) Gọi x, y lần lượt là hệ số của Fe và Cl thỏa mãn cân bằng phương trình hóa học



Cân bằng số nguyên tử Fe và số nguyên tử Cl ở hai vế ta được hệ

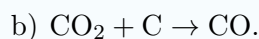
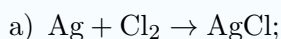
$$\begin{cases} x + 1 = y \\ 3x = 2y. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này ta được $x = 2$ và $y = 3$.

Đưa các hệ số tìm được vào phương trình hóa học, ta có

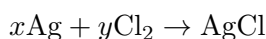


❖ **Bài 46.** Cân bằng các phương trình hóa học sau bằng phương pháp đại số. trong mỗi trường hợp sau:



🗨️ Lời giải.

a) Gọi $x; y$ lần lượt là hệ số của Ag và Cl₂ trong phương trình hóa học ($x; y \in \mathbb{R}$).

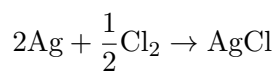


Cân bằng số nguyên tử của Ag và số nguyên tử Cl ở hai vế, ta được hệ

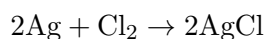
$$\begin{cases} x = 1 \\ 2y = 1. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này, ta được $x = 1$ và $y = \frac{1}{2}$.

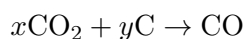
Đưa các hệ số của phương trình hóa học, ta có



Nhân hai vế của phương trình hóa học với 2, ta được



b) Gọi $x; y$ lần lượt là hệ số của CO₂ và C trong phương trình hóa học ($x; y \in \mathbb{R}$).

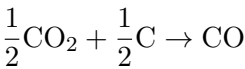


Cân bằng số nguyên tử của C và số nguyên tử O ở hai vế, ta được hệ

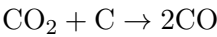
$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x = 1. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này, ta được $x = \frac{1}{2}$ và $y = \frac{1}{2}$.

Đưa các hệ số của phương trình hóa học, ta có



Nhân hai vế của phương trình hóa học với 2, ta được



ÔN TẬP CHƯƠNG I



BÀI TẬP TỰ LUẬN

🔗 **Bài 1.** Giải các phương trình sau:

a) $2(x + 1) = (5x - 1)(x + 1);$

b) $(-4x + 3)x = (2x + 5)x.$

💬 **Lời giải.**

a)

$$\begin{aligned} 2(x + 1) &= (5x - 1)(x + 1) \\ 2(x + 1) - (5x - 1)(x + 1) &= 0 \\ (x + 1)(2 - 5x + 1) &= 0 \\ (x + 1)(-5x + 3) &= 0 \\ x + 1 = 0 \text{ hoặc } -5x + 3 &= 0 \\ x = -1 \text{ hoặc } x &= \frac{3}{5}. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} (-4x + 3)x &= (2x + 5)x \\ (-4x + 3)x - (2x + 5)x &= 0 \\ x(-4x + 3 - 2x - 5) &= 0 \\ x(-6x - 2) &= 0 \\ x = 0 \text{ hoặc } -6x - 2 &= 0 \\ x = 0 \text{ hoặc } x &= -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

□

🔗 **Bài 2.** Giải các phương trình sau

a) $(3x - 1)^2 - (x + 2)^2 = 0.$

b) $x(x + 1) = 2(x^2 - 1).$

💬 **Lời giải.**

a) Ta có

$$\begin{aligned} (3x - 1)^2 - (x + 2)^2 &= 0 \\ [(3x - 1) - (x + 2)][(3x - 1) + (x + 2)] &= 0 \\ (2x - 3)(4x + 1) &= 0 \\ 2x - 3 = 0 \text{ hoặc } 4x + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Khi đó

👉 $2x - 3 = 0 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}.$

👉 $4x + 1 = 0 \Rightarrow 4x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{4}.$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = \frac{3}{2}, x = -\frac{1}{4}.$

b) Ta có

$$\begin{aligned}x(x+1) &= 2(x^2-1) \\x(x+1) &= 2(x-1)(x+1) \\(x+1)[x-2(x-1)] &= 0 \\(x+1)(-x+2) &= 0 \\x+1=0 \text{ hoặc } -x+2 &= 0.\end{aligned}$$

Khi đó

- ☑ $x+1=0 \Rightarrow x=-1.$
- ☑ $-x+2=0 \Rightarrow x=2.$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x=-1, x=2.$

□

🔗 **Bài 3.** Giải các phương trình:

a) $(5x+2)(2x-7)=0.$

b) $\left(\frac{1}{2}x+5\right)\left(-\frac{2}{3}x-\frac{4}{3}\right)=0.$

c) $y^2-5y+2(y-5)=0.$

d) $9x^2-1=(3x-1)(2x+7).$

🗨 **Lời giải.**

a) Ta có $(5x+2)(2x-7)=0$ nên $2x-7=0$ hoặc $5x+2=0.$

- ☑ $2x-7=0$ hay $2x=7$, suy ra $x=\frac{7}{2}.$
- ☑ $5x+2=0$ hay $5x=-2$, suy ra $x=-\frac{2}{5}.$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x=\frac{7}{2}; x=-\frac{2}{5}.$

b) Ta có $\left(\frac{1}{2}x+5\right)\left(-\frac{2}{3}x-\frac{4}{3}\right)=0$ nên $\frac{1}{2}x+5=0$ hoặc $-\frac{2}{3}x-\frac{4}{3}=0$

- ☑ $\frac{1}{2}x+5=0$ hay $\frac{1}{2}x=-5$, suy ra $x=-10.$
- ☑ $-\frac{2}{3}x-\frac{4}{3}=0$ hay $-\frac{2}{3}x=\frac{4}{3}$, suy ra $x=-2.$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x=-2; x=-10.$

c) Ta có

$$\begin{aligned}y^2-5y+2(y-5) &= 0 \\y^2-3y-10 &= 0 \\y^2+2y-5y-10 &= 0 \\y(y+2)-5(y+2) &= 0 \\(y+2)(y-5) &= 0 \\y+2=0 \text{ hoặc } y-5 &= 0.\end{aligned}$$

- ☑ $y+2=0$ suy ra $y=-2.$
- ☑ $y-5=0$ suy ra $y=5.$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x=-2; x=5.$

d) Ta có

$$9x^2 - 1 = (3x - 1)(2x + 7)$$

$$9x^2 - 1 = 6x^2 + 19x - 7$$

$$3x^2 - 19x + 6 = 0$$

$$3x^2 - 18x - x + 6 = 0$$

$$3x(x - 6) - (x - 6) = 0$$

$$(3x - 1)(x - 6) = 0$$

$$3x - 1 = 0 \text{ hoặc } x - 6 = 0.$$

☑ $3x - 1 = 0$ hay $3x = 1$, suy ra $x = \frac{1}{3}$.

☑ $x - 6 = 0$ suy ra $x = 6$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = 6; x = \frac{1}{3}$.

□

🔗 **Bài 4.** Giải các phương trình:

a) $(3x + 7)(4x - 9) = 0$;

b) $(5x - 0,2)(0,3x + 6) = 0$;

c) $x(2x - 1) + 5(2x - 1) = 0$;

d) $x^2 - 9 - (x + 3)(3x + 1) = 0$;

e) $x^2 - 10x + 25 = 5(5 - x)$;

f) $4x^2 = (x - 12)^2$.

🗨 **Lời giải.**

a) Ta có $(3x + 7)(4x - 9) = 0$ nên $3x + 7 = 0$ hoặc $4x - 9 = 0$.

☑ $3x + 7 = 0$ hay $3x = -7$, suy ra $x = -\frac{7}{3}$.

☑ $4x - 9 = 0$ hay $4x = 9$, suy ra $x = \frac{9}{4}$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = -\frac{7}{3}$ và $x = \frac{9}{4}$.

b) Ta có $(5x - 0,2)(0,3x + 6) = 0$ nên $5x - 0,2 = 0$ hoặc $0,3x + 6 = 0$

☑ $5x - 0,2 = 0$ hay $5x = 0,2$, suy ra $x = 0,04$.

☑ $0,3x + 6 = 0$ hay $0,3x = -6$, suy ra $x = -20$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 0,04$ và $x = -20$.

c) Ta có

$$x(2x - 1) + 5(2x - 1) = 0$$

$$(2x - 1)(x + 5) = 0$$

☑ $2x - 1 = 0$ hay $2x = 1$, suy ra $x = \frac{1}{2}$.

☑ $x + 5 = 0$ suy ra $x = -5$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = \frac{1}{2}$ và $x = -5$.

d) Ta có

$$x^2 - 9 - (x + 3)(3x + 1) = 0$$

$$(x - 3)(x + 3) - (x + 3)(3x + 1) = 0$$

$$(x + 3)(x - 3 - 3x - 1) = 0$$

$$(x + 3)(-2x - 4) = 0$$

☑ $x + 3 = 0$ suy ra $x = -3$.

☑ $-2x - 4 = 0$ hay $-2x = 4$, suy ra $x = -2$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = -3$ và $x = -2$.

e) Ta có

$$\begin{aligned}x^2 - 10x + 25 &= 5(5 - x) \\(x - 5)^2 + 5(x - 5) &= 0 \\(x - 5)(x - 5 + 5) &= 0 \\x(x - 5) &= 0 \\x = 0 \text{ hoặc } x &= 5.\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 0$ và $x = 5$.

f) Ta có

$$\begin{aligned}4x^2 &= (x - 12)^2 \\(2x)^2 - (x - 12)^2 &= 0 \\(2x - x + 12)(2x + x + 12) &= 0 \\(x + 12)(3x + 12) &= 0\end{aligned}$$

☑ $x + 12 = 0$ suy ra $x = -12$.

☑ $3x + 12 = 0$ hay $3x = -12$, suy ra $x = -4$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = -12$ và $x = -4$.

□

🔗 Bài 5. Giải phương trình

$$(x + 3)^3 - (x + 1)^3 = 56$$

🗨️ Lời giải.

$$\begin{aligned}(x + 3)^3 - (x + 1)^3 &= 56 \\\Rightarrow x^3 + 9x^2 + 27x + 27 - x^3 - 3x^2 - 3x - 1 &= 56 \\\Rightarrow 6x^2 + 24x + 26 &= 56 \\\Rightarrow 6(x^2 + 4x - 5) &= 0 \\\Rightarrow 6(x^2 - x + 5x - 5) &= 0 \\\Rightarrow x(x - 1) + 5(x - 1) &= 0 \\\Rightarrow (x - 1)(x + 5) &= 0.\end{aligned}$$

Kết luận $S = \{1; -5\}$.

□

🔗 Bài 6. Giải phương trình

$$x^3 + (x - 1)^3 = (2x - 1)^3. \quad (1)$$

🗨️ Lời giải.

Ta thấy $x + (x - 1) = 2x - 1$. Đặt $x - 1 = y$ thì (1) có dạng

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 &= (x + y)^3 \\ \Rightarrow x^3 + y^3 &= x^3 + y^3 + 3xy(x + y) \\ \Rightarrow xy(x + y) &= 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 1 = 0 \\ 2x - 1 = 0 \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}. \end{aligned}$$

Kết luận $S = \left\{0; \frac{1}{2}; 1\right\}$

□

❖ **Bài 7.** Giải phương trình

$$(x + 1)^2(x + 2) + (x - 1)^2(x - 2) = 12.$$

☞ **Lời giải.**

Rút gọn về trái của phương trình, ta được

$$\begin{aligned} 2x^3 + 10x = 12 &\Rightarrow x^3 + 5x - 6 = 0 \\ &\Rightarrow (x^3 - 1) + 5(x - 1) = 0 \\ &\Rightarrow (x - 1)(x^2 + x + 6) = 0 \end{aligned}$$

Dễ dàng chứng minh được $x^2 + x + 6 \neq 0$. Do đó $S = \{1\}$.

□

❖ **Bài 8.** Giải các phương trình sau $x^5 = x^4 + x^3 + x^2 + x + 2$.

☞ **Lời giải.**

$$\begin{aligned} x^5 &= x^4 + x^3 + x^2 + x + 2 \\ \Rightarrow (x^5 - 1) &= (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) \\ \Rightarrow (x - 2)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) &= 0 \\ \Rightarrow x - 2 &= 0 \end{aligned}$$

Vì phương trình $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ vô nghiệm.

Vậy nghiệm $x = 2$.

□

❖ **Bài 9.** Giải các phương trình sau

a) $x^3 + 2x^2 + x + 2 = 0$

b) $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$

c) $x^3 - x^2 - 21x + 45 = 0$

d) $x^3 + 3x^2 + 4x + 2 = 0$

e) $x^4 + x^2 + 6x - 8 = 0$

f) $(x^2 + 1)^2 = 4(2x - 1)$

g) $(x - 1)^3 + (2x + 3)^3 = 27x^3 + 8$

h) $6x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 1 = 0$

☞ **Lời giải.**

- a) $x^3 + 2x^2 + x + 2 = 0 \Rightarrow (x+2)(x^2+1) = 0$. Nghiệm $x = -2$.
- b) $x^3 + 2x^2 - x - 2 \Rightarrow (x+2)(x^2-1)$. Nghiệm $x = -2; -1; 1$.
- c) $x^3 - x^2 - 21x + 45 \Rightarrow (x-3)^2(x+5) = 0$. Nghiệm $x = -5; 3$.
- d) $x^3 + 3x^2 + 4x + 2 = 0 \Rightarrow (x+1)(x^2+2x+2) = 0$. Nghiệm $x = -1$.
- e) $x^4 + x^2 + 6x - 8 = 0 \Rightarrow (x-1)(x+2)(x^2-x+4) = 0$. Nghiệm $x = -2; 1$.
- f) $(x^2+1)^2 = 4(2x-1) \Rightarrow (x-1)^2(x^2+2x+5) = 0$. Nghiệm $x = 1$.
- g) $(x-1)^3 + (2x+3)^3 = 27x^3 + 8$. Nghiệm $x = -\frac{2}{3}; -\frac{1}{2}; 3$.
- h) $6x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow (x^2-1)(2x-1)(3x+1) = 0$. Nghiệm $x = -1; -\frac{1}{3}; \frac{1}{2}; 1$.

□

❖ **Bài 10.** Giải các phương trình sau

a) $\frac{x}{x-5} - \frac{2}{x+5} = \frac{x^2}{x^2-25}$.

b) $\frac{1}{x+1} - \frac{x}{x^2-x+1} = \frac{3}{x^3+1}$.

🗨 **Lời giải.**

a) Điều kiện: $\begin{cases} x-5 \neq 0 \\ x+5 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 5 \\ x \neq -5 \end{cases}$.

Ta có

$$\begin{aligned} \frac{x}{x-5} - \frac{2}{x+5} &= \frac{x^2}{x^2-25} \\ \frac{x(x+5)}{x^2-25} - \frac{2(x-5)}{x^2-25} &= \frac{x^2}{x^2-25} \\ \frac{x(x+5) - 2(x-5)}{x^2-25} &= \frac{x^2}{x^2-25} \\ \frac{x^2+3x+10}{x^2-25} &= \frac{x^2}{x^2-25} \\ x^2+3x+10 &= x^2 \\ 3x+10 &= 0 \\ x &= -\frac{10}{3} \text{ (nhận)}. \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = -\frac{10}{3}$.

b) Điều kiện: $\begin{cases} x+1 \neq 0 \\ x^2-x+1 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x \neq -1$.

Ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{x+1} - \frac{x}{x^2-x+1} &= \frac{3}{x^3+1} \\ \frac{x^2-x+1}{x^3+1} - \frac{x(x+1)}{x^3+1} &= \frac{3}{x^3+1} \\ \frac{x^2-x+1-x(x+1)}{x^3+1} &= \frac{3}{x^3+1} \\ \frac{-2x+1}{x^3+1} &= \frac{3}{x^3+1} \\ -2x+1 &= 3 \\ x &= 1 \text{ (nhận)}. \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 1$.

⇨ **Bài 11.** Giải các phương trình:

$$\text{a) } \frac{5}{x+2} + \frac{3}{x-1} = \frac{3x+4}{(x+2)(x-1)}.$$

$$\text{b) } \frac{4}{2x-3} + \frac{3}{x(2x-3)} = \frac{5}{x}.$$

$$\text{c) } \frac{2}{x-3} + \frac{3}{x+3} = \frac{3x-5}{x^2-9}.$$

$$\text{d) } \frac{x-1}{x+1} - \frac{x+1}{x-1} = \frac{8}{x^2-1}.$$

🗨 **Lời giải.**

a) Với điều kiện $\begin{cases} x \neq -2 \\ x \neq 1 \end{cases}$, ta có:

$$\begin{aligned} \frac{5}{x+2} + \frac{3}{x-1} &= \frac{3x+4}{(x+2)(x-1)} \\ \frac{5x-5}{(x+2)(x-1)} + \frac{3x+6}{(x+2)(x-1)} &= \frac{3x+4}{(x+2)(x-1)} \\ 5x-5+3x+6-3x-4 &= 0 \\ 5x-3 &= 0 \\ x &= \frac{3}{5} \quad (\text{thỏa mãn}). \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \frac{3}{5}$.

b) Với điều kiện: $\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq \frac{3}{2} \end{cases}$, ta có:

$$\begin{aligned} \frac{4}{2x-3} - \frac{3}{x(2x-3)} &= \frac{5}{x} \\ \frac{4x}{x(2x-3)} - \frac{3}{x(2x-3)} &= \frac{10x-15}{x(2x-3)} \\ 4x-3-10x+15 &= 0 \\ -6x+12 &= 0 \\ x &= 2 \quad (\text{thỏa mãn}). \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 2$.

c) Với điều kiện $\begin{cases} x \neq 3 \\ x \neq -3 \end{cases}$, ta có:

$$\begin{aligned} \frac{2}{x-3} + \frac{3}{x+3} &= \frac{3x-5}{x^2-9} \\ 2x+6+3x-9 &= 3x-5 \\ 2x+2 &= 0 \\ x &= -1 \quad (\text{thỏa mãn}). \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = -1$.

d) Với điều kiện $\begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq -1 \end{cases}$, ta có:

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{x+1} - \frac{x+1}{x-1} &= \frac{8}{x^2-1} \\ (x-1)^2 - (x+1)^2 &= 8 \\ -4x &= 8 \\ x &= -2 \quad (\text{thỏa mãn}). \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = -2$.

□

❖ **Bài 12.** Giải các phương trình:

a) $\frac{-6}{x+3} = \frac{2}{3};$

b) $\frac{x-2}{2} + \frac{1}{2x} = 0;$

c) $\frac{8}{3x-4} = \frac{1}{x+2};$

d) $\frac{x}{x-2} + \frac{2}{(x-2)^2} = 1;$

e) $\frac{3x-2}{x+1} = 4 - \frac{x+2}{x-1};$

f) $\frac{x^2}{(x-1)(x-2)} = 1 - \frac{1}{x-1}.$

🗨 **Lời giải.**

a) $\frac{-6}{x+3} = \frac{2}{3}.$

Điều kiện xác định: $x \neq -3$.

$$\frac{-6}{x+3} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{-18}{3(x+3)} = \frac{2(x+3)}{3(x+3)}$$

$$-18 = 2x + 6$$

$$2x = -24$$

$$x = -12.$$

Ta thấy $x = -12$ thỏa mãn điều kiện xác định.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = -12$.

b) $\frac{x-2}{2} + \frac{1}{2x} = 0.$

Điều kiện xác định: $x \neq 0$.

$$\frac{x(x-2)}{2x} + \frac{1}{2x} = 0$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x-1)^2 = 0$$

$$x-1 = 0$$

$$x = 1.$$

Ta thấy $x = 1$ thỏa mãn điều kiện xác định.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 1$.

c) $\frac{8}{3x-4} = \frac{1}{x+2}.$

Điều kiện xác định: $x \neq -2; x \neq \frac{4}{3}.$

$$\frac{8}{3x-4} = \frac{1}{x+2}$$

$$8(x+2) = 3x-4$$

$$8x + 16 = 3x - 4$$

$$5x = -20$$

$$x = -4.$$

Ta thấy $x = -4$ thỏa mãn điều kiện xác định.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = -4$.

d) $\frac{x}{x-2} + \frac{2}{(x-2)^2} = 1.$

Điều kiện xác định: $x \neq 2$.

$$\frac{x}{x-2} + \frac{2}{(x-2)^2} = 1$$

$$x(x-2) + 2 = (x-2)^2$$

$$x^2 - 2x + 2 = x^2 - 4x + 4$$

$$2x = 2$$

$$x = 1.$$

Ta thấy $x = 1$ thỏa mãn điều kiện xác định.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 1$.

e) $\frac{3x-2}{x+1} = 4 - \frac{x+2}{x-1}.$

Điều kiện xác định: $x \neq -1$ và $x \neq 1$.

$$\frac{3x-2}{x+1} = 4 - \frac{x+2}{x-1}$$

$$(3x-2)(x-1) = 4(x^2-1) - (x+2)(x+1)$$

$$3x^2 - 3x - 2x + 2 = 4x^2 - 4 - x^2 - 3x - 2$$

$$-2x = -8$$

$$x = 4.$$

Ta thấy $x = 4$ thỏa mãn điều kiện xác định.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 4$.

f) $\frac{x^2}{(x-1)(x-2)} = 1 - \frac{1}{x-1}.$

Điều kiện xác định: $x \neq 1$ và $x \neq 2$.

$$\frac{x^2}{(x-1)(x-2)} = 1 - \frac{1}{x-1}$$

$$x^2 = (x-1)(x-2) - (x-2)$$

$$x^2 = x^2 - 3x + 2 - x + 2$$

$$4x = 4$$

$$x = 1.$$

Ta thấy $x = 1$ không thỏa mãn điều kiện xác định.

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

□

❖ **Bài 13.** Giải phương trình $\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x^2+x+1} = \frac{x^2+x}{x^3-1}.$

Lời giải.

ĐKXD: $x \neq 1$. Quy đồng mẫu hai vế của phương trình:

$$\begin{aligned}\frac{(x^2 + x + 1) + 2(x - 1)}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} &= \frac{x^2 + x}{x^3 - 1} \\ \frac{x^2 + 3x - 1}{x^3 - 1} &= \frac{x^2 + x}{x^3 - 1}\end{aligned}$$

Suy ra $x^2 + 3x - 1 = x^2 + x$ hay $2x - 1 = 0$.

Giải phương trình: $2x - 1 = 0$

$$\begin{aligned}2x &= 1 \\ x &= \frac{1}{2} \text{ (thỏa mãn ĐKXD).}\end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = \frac{1}{2}$. □

❖ **Bài 14.** Giải phương trình $\frac{x}{x+3} - \frac{2}{x-3} = \frac{-2x-6}{x^2-9}$.

Lời giải.

ĐKXD: $x \neq 3$ và $x \neq -3$.

Quy đồng mẫu hai vế của phương trình:

$$\begin{aligned}\frac{x(x-3) - 2(x+3)}{(x+3)(x-3)} &= \frac{-2x-6}{x^2-9} \\ \frac{x^2-5x-6}{x^2-9} &= \frac{-2x-6}{x^2-9}.\end{aligned}$$

Suy ra $x^2 - 5x - 6 = -2x - 6$ hay $x^2 - 3x = 0$.

Giải phương trình $x^2 - 3x = 0$:

$$\begin{aligned}x(x-3) &= 0 \\ x &= 0 \text{ hoặc } x-3=0 \\ x &= 0 \text{ (thỏa mãn ĐKXD) hoặc } x=3 \text{ (không thỏa mãn ĐKXD).}\end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 0$. □

❖ **Bài 15.** Giải các phương trình sau:

$$\text{a) } \frac{1}{x+2} - \frac{2}{x^2-2x+4} = \frac{x-4}{x^3+8} \qquad \text{b) } \frac{2x}{x-4} + \frac{3}{x+4} = \frac{x-12}{x^2-16}.$$

Lời giải.

$$\text{a) } \frac{1}{x+2} - \frac{2}{x^2-2x+4} = \frac{x-4}{x^3+8}$$

ĐKXD: $x \neq -2$.

Quy đồng mẫu hai vế của phương trình:

$$\begin{aligned}\frac{x^2-2x+4-2(x+2)}{(x+2)(x^2-2x+4)} &= \frac{x-4}{x^3+8} \\ \frac{x^2-2x+4-2x-4}{x^3+8} &= \frac{x-4}{x^3+8} \\ \frac{x^2-4x}{x^3+8} &= \frac{x-4}{x^3+8}\end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}x^2 - 4x &= x - 4 \\x(x - 4) &= x - 4 \\x(x - 4) - (x - 4) &= 0 \\(x - 4)(x - 1) &= 0 \\x - 4 = 0 \text{ hoặc } x - 1 &= 0 \\x = 4 \text{ hoặc } x = 1\end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 4$ hoặc $x = 1$.

b) $\frac{2x}{x-4} + \frac{3}{x+4} = \frac{x-12}{x^2-16}$.

ĐKXD: $x \neq -4$ và $x \neq 4$.

Quy đồng mẫu hai vế của phương trình:

$$\begin{aligned}\frac{2x(x+4) + 3(x-4)}{(x-4)(x+4)} &= \frac{x-12}{x^2-16} \\ \frac{2x^2 + 8x + 3x - 12}{x^2 - 16} &= \frac{x-12}{x^2-16} \\ \frac{2x^2 + 11x - 12}{x^2 - 16} &= \frac{x-12}{x^2-16}\end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}2x^2 + 11x - 12 &= x - 12 \\2x^2 + 11x - x &= 0 \\2x^2 + 10x &= 0 \\2x(x + 5) &= 0 \\2x = 0 \text{ hoặc } x + 5 &= 0 \\x = 0 \text{ hoặc } x = -5\end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 0$ hoặc $x = -5$.

□

❖ **Bài 16.** Giải phương trình:

$$\frac{x-1}{x-2} + \frac{x+3}{x-4} = \frac{2}{(x-2)(4-x)}. \quad (1)$$

💬 **Lời giải.**

ĐKXD của phương trình là $x \neq 2, x \neq 4$.

Biến đổi phương trình (1):

$$(x-1)(x-4) + (x+3)(x-2) = -2.$$

Thu gọn phương trình, ta được

$$2x(x-2) = 0. \quad (2)$$

Nghiệm của (2) là $x_1 = 0, x_2 = 2$. Trong đó, $x_1 = 0$ thỏa mãn ĐKXD, $x_2 = 2$ không thỏa mãn ĐKXD.

Kết luận: $S = \{0\}$.

□

❖ **Bài 17.** Giải các phương trình:

a) $\frac{x+2}{x+1} + \frac{3}{x-2} = \frac{3}{x^2-x-2} + 1;$

b) $\frac{x+6}{x-5} + \frac{x-5}{x+6} = \frac{2x^2+23x+61}{x^2+x-30};$

$$\text{c) } \frac{6}{x-5} + \frac{x+2}{x-8} = \frac{18}{(x-5)(8-x)} - 1;$$

$$\text{d) } \frac{x-4}{x-1} + \frac{x+4}{x+1} = 2;$$

$$\text{e) } \frac{3}{x+1} - \frac{1}{x-2} = \frac{9}{(x+1)(2-x)};$$

$$\text{f) } \frac{x^2-x}{x+3} - \frac{x^2}{x-3} = \frac{7x^2-3x}{9-x^2}.$$

🗨️ Lời giải.

a) ĐKXD của phương trình là: $x \neq -1, x \neq 2$.

Biến đổi phương trình, ta được

$$\begin{aligned}(x+2)(x-2) + 3(x+1) &= 3 + (x+1)(x-2) \\ \Rightarrow 4x &= 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

$$\text{Vậy } S = \left\{ \frac{1}{2} \right\}.$$

b) ĐKXD của phương trình là: $x \neq -6, x \neq 5$.

Biến đổi phương trình, ta được

$$\begin{aligned}(x+6)^2 + (x-5)^2 &= 2x^2 + 23x + 61 \\ \Rightarrow 2x &= 23x \\ \Rightarrow x &= 0.\end{aligned}$$

$$\text{Vậy } S = \{0\}.$$

c) ĐKXD của phương trình là: $x \neq 8, x \neq 5$.

Biến đổi phương trình, ta được

$$\begin{aligned}6(x-8) + (x+2)(x-5) &= -18 - (x-5)(x-8) \\ \Rightarrow 2x^2 - 10x &= 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 5 \end{cases}.\end{aligned}$$

Vì $x = 5$ bị loại nên $S = \{0\}$.

d) ĐKXD của phương trình là: $x \neq \pm 1$.

Biến đổi phương trình, ta được

$$\begin{aligned}(x-4)(x+1) + (x+4)(x-1) &= 2x^2 - 2 \\ \Rightarrow -2 &= 0.\end{aligned}$$

$$\text{Vậy } S = \emptyset.$$

e) ĐKXD của phương trình là: $x \neq -1, x \neq 2$.

Biến đổi phương trình, ta được

$$\begin{aligned}3(x-2) - (x+1) &= -9 \\ \Rightarrow 2x &= -2 \\ \Rightarrow x &= -1.\end{aligned}$$

$$\text{Vậy } S = \emptyset.$$

f) ĐKXD của phương trình là: $x \neq \pm 3$. Biến đổi phương trình, ta được

$$\begin{aligned}(x^2-x)(x-3) - x^2(x+3) &= -7x^2 + 3x \\ \Rightarrow 0 &= 0.\end{aligned}$$

Vậy phương trình có vô số nghiệm: x bất kỳ khác ± 3 .



◀▶ **Bài 18.** Giải các phương trình sau:

$$\text{a) } \frac{x+1}{x^2+x+1} - \frac{x-1}{x^2-x+1} = \frac{3}{x(x^4+x^2+1)}; \quad \text{b) } \frac{x+2}{x^2+2x+4} - \frac{x-2}{x^2-2x+4} = \frac{6}{x(x^4+4x^2+16)}.$$

💬 **Lời giải.**

a) ĐKXD của phương trình là $x \neq 0$.

Biến đổi phương trình, ta được

$$\begin{aligned} (x+1)x(x^2-x+1) - (x-1)x(x^2+x+1) &= 3 \\ \Rightarrow 2x &= 3 \\ \Rightarrow x &= \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } S = \left\{ \frac{3}{2} \right\}.$$

b) ĐKXD của phương trình: $x \neq 0$.

Biến đổi phương trình, ta được

$$\begin{aligned} x(x+2)(x^2-2x+4) - x(x-2)(x^2+2x+4) &= 6 \\ \Rightarrow 16x &= 6 \\ \Rightarrow x &= \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } S = \left\{ \frac{3}{8} \right\}.$$

□

◀▶ **Bài 19.** Để loại bỏ x một loại tảo độc khỏi một hồ nước, người ta ước tính chi phí cần bỏ ra là

$$C(x) = \frac{50x}{100-x} \text{ (triệu đồng), với } 0 \leq x < 100.$$

Nếu bỏ ra 450 triệu đồng, người ta có thể loại bỏ được bao nhiêu phần trăm loại tảo độc đó?

💬 **Lời giải.**

Thế $C(x) = 450$ ta có

$$450 = \frac{50x}{100-x}$$

ĐKXD: $x \neq 100$

Quy đồng mẫu hai vế của phương trình:

$$\begin{aligned} \frac{450(100-x)}{100-x} &= \frac{50x}{100-x} \\ \frac{45000-450x}{100-x} &= \frac{50x}{100-x} \end{aligned}$$

Suy ra phương trình

$$\begin{aligned} 450(100-x) &= 50x \\ 45\,000 - 450x &= 50x \\ 45\,000 &= 50x + 450x \\ 45\,000 &= 500x \\ x &= 90 \end{aligned}$$

Vậy nếu bỏ ra 450 triệu đồng thì loại bỏ được 90% loại tảo độc đó.

□

🔗 **Bài 20.** Một hãng viễn thông nước ngoài có hai gói cước như sau

Gói cước A	Gói cước B
Cước thuê bao hàng tháng 32 USD	Cước thuê bao hàng tháng là 44 USD
45 phút miễn phí	Không có phút miễn phí
0,4 USD cho mỗi phút thêm	0,25 USD/phút

- a) Hãy viết một phương trình xác định thời gian gọi (phút) mà phí phải trả trong cùng một tháng của hai gói cước là như nhau và giải phương trình đó.
- b) Nếu khách hàng chỉ gọi tối đa là 180 phút trong 1 tháng thì nên dùng gói cước nào? Nếu khách hàng gọi 500 phút trong 1 tháng thì nên dùng gói cước nào?

💬 **Lời giải.**

- a) Vì cước thuê bao hàng tháng của gói cước A và gói cước B lần lượt là 32 USD và 44 USD nên để phí phải trả trong cùng một tháng của hai gói cước là như nhau thì thời gian gọi phải trên 45 phút.

Gọi x (phút) là thời gian gọi của một khách hàng ($x > 45$).

Phí phải trả trong một tháng khi sử dụng gói cước A là $0,4 \cdot (x - 45) + 32$ (USD).

Phí phải trả trong một tháng khi sử dụng gói cước B là $0,25x + 44$ (USD).

Để phí phải trả trong cùng một tháng của hai gói cước là như nhau thì

$$\begin{aligned} 0,4 \cdot (x - 45) + 32 &= 0,25x + 44 \\ \frac{2}{5}(x - 45) + 32 &= \frac{1}{4}x + 44 \\ \frac{3}{20}x &= 30 \\ x &= 200 \text{ (nhận)}. \end{aligned}$$

Thời gian gọi thỏa mãn yêu cầu đề bài là 200 phút.

- b) Nếu khách hàng chỉ gọi tối đa là 180 phút trong 1 tháng thì

☑ phí tối đa sử dụng theo gói cước A là $0,4 \cdot (180 - 45) + 32 = 86$ USD.

☑ phí tối đa sử dụng theo gói cước B là $0,25 \cdot 180 + 44 = 89$ USD.

Vì $86 < 89$ do đó khách hàng nên sử dụng gói cước A.

Nếu khách hàng gọi 500 phút trong 1 tháng thì

☑ phí tối đa sử dụng theo gói cước A là $0,4 \cdot (500 - 45) + 32 = 214$ USD.

☑ phí tối đa sử dụng theo gói cước B là $0,25 \cdot 500 + 44 = 169$ USD.

Vì $214 > 169$ do đó khách hàng nên sử dụng gói cước B.

□

🔗 **Bài 21.** Cho hai phương trình

$$\begin{aligned} -2x + 5y &= 7; & (1) \\ 4x - 3y &= 7. & (2) \end{aligned}$$

Trong các cặp số $(2; 0)$, $(1; -1)$, $(-1; 1)$, $(-1; 6)$, $(4; 3)$ và $(-2; -5)$, cặp số nào là

- a) Nghiệm của phương trình (1)?
- b) Nghiệm của phương trình (2)?
- c) Nghiệm của hệ gồm phương trình (1) và phương trình (2)?

💬 **Lời giải.**

- a) Nghiệm của phương trình (1) là $(-1; 1)$ và $(4; 3)$ vì $-2 \cdot (-1) + 5 \cdot 1 = 7$ và $-2 \cdot 4 + 5 \cdot 3 = 7$.
- b) Nghiệm của phương trình (2) là $(1; -1)$ và $(4; 3)$, $(-2; -5)$ vì $4 \cdot 1 - 3 \cdot (-1) = 7$; $4 \cdot 4 - 3 \cdot 3 = 7$; $4 \cdot (-2) - 3 \cdot (-5) = 7$.
- c) Nghiệm của hệ gồm phương trình (1) và phương trình (2) là $(4; 3)$.

□

❖ **Bài 22.** Giải các hệ phương trình:

a)
$$\begin{cases} 2x + 5y = 10 \\ \frac{2}{5}x + y = 1. \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 0,2x + 0,1y = 0,3 \\ 3x + y = 5. \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} \frac{3}{2}x - y = \frac{1}{2} \\ 6x - 4y = 2. \end{cases}$$

🗨 **Lời giải.**

a) Ta có
$$\begin{cases} 2x + 5y = 10 \\ \frac{2}{5}x + y = 1. \end{cases}$$

Từ phương trình thứ hai của hệ ta có $y = 1 - \frac{2}{5}x$. Thế vào phương trình thứ nhất của hệ ta được $2x + 5 \cdot (1 - \frac{2}{5}x) = 10 \Rightarrow 2x + 5 - 2x = 10 \Rightarrow 0x = 5$. (1)

Do không có giá trị nào của x thỏa mãn hệ thức (1) nên hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

b) Ta có
$$\begin{cases} 0,2x + 0,1y = 0,3 \\ 3x + y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x - y = -3 \\ 3x + y = 5. \end{cases}$$

Cộng hai vế phương trình của hệ mới, ta được $x = 2$.

Thay $x = 2$ vào phương trình thứ hai của hệ, ta được $3 \cdot 2 + y = 5 \Rightarrow y = -1$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(2; -1)$.

c) Ta có
$$\begin{cases} \frac{3}{2}x - y = \frac{1}{2} \\ 6x - 4y = 2. \end{cases}$$

Từ phương trình thứ nhất của hệ ta có $y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$. Thế vào phương trình thứ hai của hệ ta được $6x - 6x + 2 = 2 \Rightarrow 0 = 0$. (2)

Ta thấy rằng với mọi giá trị của x thì hệ thức (2) luôn đúng.

Do đó hệ đã cho có vô số nghiệm.

□

❖ **Bài 23.** Giải các hệ phương trình:

a)
$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ x - 7y = -13. \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 4x + y = 2 \\ 8x + 3y = 5. \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 5x - 4y = 3 \\ 2x + y = 4. \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} 3x - 2y = 10 \\ x - \frac{2}{3}y = 3\frac{1}{3}. \end{cases}$$

🗨 **Lời giải.**

a) Ta có
$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ x - 7y = -13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 3x - 21y = -39 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 23y = 46 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 1. \end{cases}$$

Vậy $S = \{(1; 2)\}$.

b) Ta có
$$\begin{cases} 4x + y = 2 \\ 8x + 3y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x + 2y = 4 \\ 8x + 3y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y = -1 \\ 4x + y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ y = 1. \end{cases}$$

Vậy $S = \left\{ \left(\frac{1}{4}; 1 \right) \right\}$.

$$\text{c) Ta có } \begin{cases} 5x - 4y = 3 \\ 2x + y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x - 4y = 3 \\ 8x + 4y = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 13x = 19 \\ 2x + y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{19}{13} \\ y = \frac{14}{13} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } S = \left\{ \left(\frac{19}{13}; \frac{14}{13} \right) \right\}.$$

$$\text{d) Ta có } \begin{cases} 3x - 2y = 10 \\ x - \frac{2}{3}y = 3\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 10 \\ 3x - 2y = 10 \end{cases} \Rightarrow 3x - 2y = 10.$$

Do đó hệ phương trình có vô số nghiệm.

□

❖ **Bài 24.** Giải các hệ phương trình:

$$\text{a) } \begin{cases} x + 3y = -2 \\ 5x + 8y = 11; \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x + 3y = -2 \\ 3x - 2y = -3; \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 2x - 4y = -1 \\ -3x + 6y = 2. \end{cases}$$

🗨 **Lời giải.**

$$\text{a) Ta có } \begin{cases} x + 3y = -2 \\ 5x + 8y = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5x - 15y = 10 \\ 5x + 8y = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -7y = 21 \\ 5x + 8y = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -3 \\ 5x + 8 \cdot (-3) = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -3 \\ x = 7. \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y) = (7; -3)$.

$$\text{b) Ta có } \begin{cases} 2x + 3y = -2 \\ 3x - 2y = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x + 6y = -4 \\ 9x - 6y = -9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 13x = -13 \\ 9x - 6y = -9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ 9 \cdot (-1) - 6y = -9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 0. \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y) = (-1; 0)$.

$$\text{c) Ta có } \begin{cases} 2x - 4y = -1 \\ -3x + 6y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x - 12y = -3 \\ -6x + 12y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0x + 0y = 1 \text{ (phương trình vô nghiệm)} \\ -6x + 12y = 0. \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

□

❖ **Bài 25.** Giải các hệ phương trình:

$$\text{a) } \begin{cases} 0,5x + 2y = -2,5 \\ 0,7x - 3y = 8,1. \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 5x - 3y = -2 \\ 14x + 8y = 19. \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 2(x - 2) + 3(1 + y) = -2 \\ 3(x - 2) - 2(1 + y) = -3. \end{cases}$$

🗨 **Lời giải.**

$$\text{a) Ta có } \begin{cases} 0,5x + 2y = -2,5 \\ 0,7x - 3y = 8,1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1,5x + 6y = -7,5 \\ 1,4x - 6y = 16,2 \end{cases}$$

Cộng hai vế của hệ mới, ta được $2,9x = 8,7 \Rightarrow x = 3$.

Thay $x = 3$ vào phương trình thứ nhất của hệ ta được $0,5 \cdot 3 + 2y = -2,5 \Rightarrow y = -2$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(3; -2)$.

$$\text{b) Ta có } \begin{cases} 5x - 3y = -2 \\ 14x + 8y = 19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 40x - 24y = -16 \\ 42x + 24y = 57. \end{cases}$$

Cộng hai vế của hệ mới, ta được $82x = 41 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$.

Thay $x = \frac{1}{2}$ vào phương trình thứ nhất ta được $5 \cdot \frac{1}{2} - 3y = -2 \Rightarrow y = \frac{3}{2}$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2} \right)$.

$$\text{c) Ta có } \begin{cases} 2(x - 2) + 3(1 + y) = -2 \\ 3(x - 2) - 2(1 + y) = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ 3x - 2y = 5. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x + 6y = -2 \\ 9x - 6y = 15. \end{cases}$$

Cộng hai vế của hệ mới, ta được $13x = 15 \Rightarrow x = 1$.

Thay $x = 1$ vào phương trình thứ nhất của hệ mới ta được $4 \cdot 1 + 6y = -2 \Rightarrow y = -1$.
 Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(1; -1)$. □

❖ **Bài 26.** Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 0,5x + 0,6y = 0,4 \\ 0,4x - 0,9y = 1,7. \end{cases}$$

🗨 **Lời giải.**

Nhân hai vế của phương trình với 10, ta được
$$\begin{cases} 5x + 6y = 4 \\ 4x - 9y = 17. \end{cases} \quad (1)$$

Ta giải hệ (1). Nhân hai vế của phương trình thứ nhất với 3 và nhân hai vế của phương trình thứ hai với 2, ta được hệ

$$\begin{cases} 15x + 18y = 12 \\ 8x - 18y = 34. \end{cases} \quad (2)$$

Cộng từng vế của hai phương trình của hệ (2) ta được $23x = 46$, suy ra $x = 2$.

Thế $x = 2$ vào phương trình thứ nhất của (1), ta được $5 \cdot 2 + 6y = 4$ hay $6y = -6$, suy ra $y = -1$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(2; -1)$. □

❖ **Bài 27.** Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp thế

a)
$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - 2y = -1; \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 0,5x - 0,5y = 0,5 \\ 1,2x - 1,2y = 1,2; \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x + 3y = -2 \\ 5x - 4y = 28. \end{cases}$$

🗨 **Lời giải.**

a) Từ phương trình thứ nhất ta có $y = 2x - 1$. Thế vào phương trình thứ hai, ta được $x - 2(2x - 1) = -1$ hay $-3x + 2 = -1$, suy ra $x = 1$.

Từ đó $y = 2 \cdot 1 - 1 = 1$. Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(2; 1)$.

b) Từ phương trình thứ nhất ta có $x = 1 + y$. (1)

Thế vào phương trình thứ hai, ta được $1,2(1 + y) - 1,2y = 1,2$ hay $0y = 0$. (2)

Ta thấy mọi giá trị của y đều thỏa mãn (2).

Với giá trị tùy ý của y , giá trị tương ứng của x được tính bởi (1).

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(1 + y; y)$ với $y \in \mathbb{R}$ tùy ý.

c) Từ phương trình thứ nhất ta có $x = -2 - 3y$. Thế vào phương trình thứ hai, ta được $5(-2 - 3y) - 4y = 28$ hay $-10 - 19y = 28$, suy ra $y = -2$.

Từ đó $x = -2 - 3 \cdot (-2) = 4$. Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(4; -2)$. □

❖ **Bài 28.** Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp cộng đại số

a)
$$\begin{cases} 5x + 7y = -1 \\ 3x + 2y = -5; \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 2x - y = 11 \\ -0,8x + 1,2y = 1; \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 4x - 3y = 6 \\ 0,4x + 0,2y = 0,8. \end{cases}$$

🗨 **Lời giải.**

a) Nhân hai vế của phương trình thứ nhất với 2 và nhân hai vế của phương trình thứ hai với -7 , ta được hệ

$$\begin{cases} 10x + 14y = -2 \\ -21x - 14y = 35. \end{cases} \quad (1)$$

Cộng từng vế của hai phương trình của hệ (1) ta được $-11x = 33$, suy ra $x = -3$.

Thế $x = -3$ vào phương trình thứ nhất của (1), ta được $5 \cdot (-3) + 7y = -1$ hay $7y = 14$, suy ra $y = 2$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(-3; 2)$.

b) Nhân hai vế của phương trình thứ nhất với 4 và nhân hai vế của phương trình thứ hai với 10, ta được hệ

$$\begin{cases} 8x - 4y = 44 \\ -8x + 12y = 10. \end{cases} \quad (1)$$

Cộng từng vế của hai phương trình của hệ (1) ta được $8y = 54$, suy ra $y = 6,75$.

Thế $y = 6,75$ vào phương trình thứ nhất của (1), ta được $2x - 6,75 = 11$ hay $2x = 17,75$, suy ra $x = 8,875$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(8,875; 6,75)$.

c) Nhân hai vế của phương trình thứ nhất với 2 và nhân hai vế của phương trình thứ hai với 30, ta được hệ

$$\begin{cases} 8x - 6y = 12 \\ 12x + 6y = 24. \end{cases} \quad (1)$$

Cộng từng vế của hai phương trình của hệ (1) ta được $20x = 36$, suy ra $x = 1,8$.

Thế $x = 1,8$ vào phương trình thứ nhất của (1), ta được $4 \cdot 1,8 - 3y = 6$ hay $-3y = -1,2$, suy ra $y = 0,4$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(1,8; 0,4)$.

□

❖ **Bài 29.** Giải các hệ phương trình sau

$$\text{a) } \begin{cases} \frac{7}{\sqrt{x-7}} - \frac{4}{\sqrt{y+6}} = \frac{5}{3} \\ \frac{5}{\sqrt{x-7}} + \frac{3}{\sqrt{y+6}} = 2\frac{1}{6} \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \frac{4}{x+y-1} + \frac{5}{y-2x-3} = \frac{5}{2} \\ \frac{3}{x+y-1} - \frac{1}{y-2x-3} = \frac{7}{5} \end{cases}$$

🗨 **Lời giải.**

a) Điều kiện $x > 7; y > -6$.

Đặt $\frac{1}{\sqrt{x-7}} = u > 0; \frac{1}{\sqrt{y+6}} = v > 0$.

Hệ phương trình có dạng $\begin{cases} 7u - 4v = \frac{5}{3} \\ 5u + 3v = 2\frac{1}{6} \end{cases}$.

Giải hệ phương trình ta được $\begin{cases} u = \frac{1}{3} \\ v = \frac{1}{6} \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện).

Suy ra $\begin{cases} \sqrt{x-7} = 3 \\ \sqrt{y+6} = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 16 \\ y = 30 \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(16; 30)$.

b) Đặt $\frac{1}{x+y-1} = u; \frac{1}{y-2x-3} = v$. (Điều kiện $x+y-1 \neq 0; y-2x-3 \neq 0$).

Hệ phương trình có dạng $\begin{cases} 4u + 5v = \frac{5}{2} \\ 3u - v = \frac{7}{5} \end{cases}$.

Giải hệ phương trình ta được $\begin{cases} u = \frac{1}{2} \\ v = \frac{1}{10} \end{cases}$.

Suy ra $\begin{cases} x+y-1 = 2 \\ y-2x-3 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y = 3 \\ -2x+y = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{10}{3} \\ y = 6\frac{1}{3} \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(-\frac{10}{3}; 6\frac{1}{3})$.

□

❖ **Bài 30.** Giải các hệ phương trình sau

$$\text{a) } \begin{cases} x + y + z = 8 \\ 3x - 2y + z = 1 \\ 4x + y + 2z = 19 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x + y + z = 23 \\ x + 2y + z = 20 \\ x + y + 2z = 17 \end{cases}$$

🗨 **Lời giải.**

$$\text{a) } \begin{cases} x + y + z = 8 & (1) \\ 3x - 2y + z = 1 & (2) \\ 4x + y + 2z = 19 & (3) \end{cases}$$

Từ phương trình (1) ta có $z = 8 - x - y$ thay vào phương trình (2), (3) ta có

$$\begin{cases} 3x - 2y + 8 - x - y = 1 \\ 4x + y + 2 \cdot (8 - x - y) = 19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 3y = -7 \\ 2x - y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 5. \end{cases}$$

Suy ra $z = 8 - 4 - 5 = -1$.

Vậy hệ có nghiệm là $(4; 5; -1)$.

$$\text{b) } \begin{cases} 2x + y + z = 23 & (1) \\ x + 2y + z = 20 & (2) \\ x + y + 2z = 17 & (3) \end{cases}$$

Từ phương trình (1), (2), (3) cộng vế với vế ta có

$$4x + 4y + 4z = 60 \Rightarrow x + y + z = 15. \quad (4)$$

🕒 Từ (1) và (4) $\Rightarrow x + 15 = 23 \Rightarrow x = 8$.

🕒 Từ (2) và (4) $\Rightarrow y + 15 = 20 \Rightarrow y = 5$.

🕒 Từ (3) và (4) $\Rightarrow z + 15 = 17 \Rightarrow z = 2$.

Vậy hệ có nghiệm là $(8; 5; 2)$.

□

❖ **Bài 31.** Với giá trị $m \neq 0$ nào thì hệ $\begin{cases} mx - y = 2 \\ 3x + my = 5 \end{cases}$ có nghiệm $(x; y)$ thỏa mãn

$$x + y = 1 - \frac{m^2}{m^2 + 3}.$$

🗨 **Lời giải.**

$$\begin{cases} mx - y = 2 & (1) \\ 3x + my = 5 & (2) \end{cases}$$

🕒 Từ phương trình (1) $\Rightarrow y = mx - 2$, thay vào phương trình (2) ta có

$$3x + m(mx - 2) = 5 \Rightarrow x = \frac{2m + 5}{m^2 + 3}.$$

Suy ra $y = \frac{5m - 6}{m^2 + 3}.$

🕒 Ta có $x + y = 1 - \frac{m^2}{m^2 + 3} \Rightarrow \frac{2m + 5}{m^2 + 3} + \frac{5m - 6}{m^2 + 3} = 1 - \frac{m^2}{m^2 + 3} \Rightarrow m = -\frac{4}{7}.$

□

❖ **Bài 32.** Xác định a để hệ $\begin{cases} 2x + y = a + 2 \\ x - y = a \end{cases}$ có nghiệm $(x; y)$ thỏa mãn $x < y$.

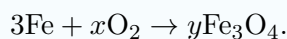
🗨 **Lời giải.**

$$\begin{cases} 2x + y = a + 2 \\ x - y = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2a + 2 \\ x - y = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2a + 2}{3} \\ y = \frac{2 - a}{3} \end{cases}$$

Ta có $x < y \Rightarrow \frac{2a + 2}{3} < \frac{2 - a}{3} \Rightarrow a < 0$.

Vậy với $a < 0$ thì hệ có nghiệm $(x; y)$ thỏa mãn $x < y$. □

❖ **Bài 33.** Tìm các hệ số x, y trong phản ứng hóa học đã được cân bằng sau:



🗨 **Lời giải.**

Vì số nguyên tử của Fe và O ở cả hai vế của phương trình phản ứng phải bằng nhau nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 3 = 3y \\ 2x = 4y \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} y = 1 \\ x = 2y \end{cases}$$

Giải hệ này ta được $x = 2, y = 1$. □

❖ **Bài 34.** Tìm hai số a và b để đường thẳng $y = ax + b$ đi qua hai điểm $A(-2; -1)$ và $B(2; 3)$.

🗨 **Lời giải.**

Đường thẳng $y = ax + b$ đi qua điểm $A(-2; -1)$ nên $a(-2) + b = -1$ hay $-2a + b = -1$.

Tương tự, đường thẳng $y = ax + b$ đi qua điểm $B(2; 3)$ nên $a \cdot 2 + b = 3$ hay $2a + b = 3$.

Từ đó, ta có hệ phương trình với hai ẩn là a và b

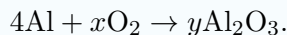
$$\begin{cases} -2a + b = -1 \\ 2a + b = 3 \end{cases}$$

Cộng từng vế hai phương trình của hệ, ta được $2b = 2$, suy ra $b = 1$.

Thay $b = 1$ vào phương trình thứ nhất, ta có $-2a + 1 = -1$, suy ra $a = 1$.

Vậy ta có đường thẳng $y = x + 1$. □

❖ **Bài 35.** Tìm các hệ số x, y trong phản ứng hóa học đã được cân bằng sau:



🗨 **Lời giải.**

Vì số nguyên tử của Al và O ở cả hai vế của phương trình phản ứng phải bằng nhau nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 4 = 2y \\ 2x = 3y \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} y = 2 \\ 2x = 3y \end{cases}$$

Giải hệ này ta được $x = 3, y = 2$. □

❖ **Bài 36.** Tìm a và b sao cho hệ phương trình $\begin{cases} ax + by = 1 \\ ax + (b - 2)y = 3 \end{cases}$ có nghiệm là $(1; -2)$.

🗨 **Lời giải.**

Thay $(1; -2)$ vào hệ phương trình ta có $\begin{cases} a - 2b = 1 \\ a + (b - 2)(-2) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 2b = 1 \\ a - 2b = -1 \end{cases}$.

Hệ trên vô nghiệm nên không tồn tại giá trị a, b thỏa đề bài. □

🔗 **Bài 37.** Giải các hệ phương trình sau

$$\text{a) } \begin{cases} \frac{5x}{x+4} + \frac{2y}{2y-3} = 27 \\ \frac{2x}{x+4} - \frac{6y}{2y-3} = 4 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \frac{3}{x+2} - \frac{y}{y+1} = -1 \\ \frac{x}{x+2} + \frac{2}{y+1} = -\frac{5}{3} \end{cases}$$

🗨 **Lời giải.**

a) Đặt $\frac{x}{x+4} = u$; $\frac{y}{2y-3} = v$, điều kiện $x \neq -4$; $y \neq \frac{3}{2}$.

$$\text{Hệ phương trình có dạng } \begin{cases} 5u + 2v = 27 \\ 2u - 6v = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 5 \\ v = 1. \end{cases}$$

Từ đó suy ra nghiệm của hệ là $(-5; 3)$.

$$\text{b) Biến đổi hệ phương trình dưới dạng } \begin{cases} \frac{3}{x+2} + \frac{1}{y+1} = 0 \\ -\frac{2}{x+2} + \frac{2}{y+1} = -\frac{8}{3}. \end{cases}$$

Đặt $\frac{1}{x+2} = u$; $\frac{1}{y+1} = v$, điều kiện $x \neq -2$; $y \neq -1$.

$$\text{Hệ phương trình có dạng } \begin{cases} 3u + v = 0 \\ -2u + 2v = -\frac{8}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = \frac{1}{3} \\ v = -1. \end{cases}$$

Từ đó suy ra nghiệm của hệ là $(1; -2)$. □

🔗 **Bài 38.** Giải các hệ phương trình sau

$$\text{a) } \begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + 2y - 3z = -8 \\ 3x - y + 2z = 46 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x + y - z = 2 \\ y + z - x = 6 \\ z + x - y = 4 \end{cases}$$

🗨 **Lời giải.**

a) Từ phương trình đầu suy ra $z = 6 - x - y$ thay vào hai phương trình sau và thu gọn, ta được

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - 3y = 34 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = -8 \end{cases}. \text{ Do đó } z = 6 - 10 + 8 = 4.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x; y; z) = (10; -8; 4)$.

b) Cộng vế với vế của ba phương trình ta được $x + y + z = 12$, sau đó kết hợp với từng phương trình, ta tìm được nghiệm của hệ là $(x; y; z) = (3; 4; 5)$. □

🔗 **Bài 39.** Tìm hai số nguyên dương biết tổng của chúng bằng 1006, nếu lấy số lớn chia cho số bé được thương là 2 và số dư là 124.

🗨 **Lời giải.**

Gọi x, y lần lượt là số lớn và số bé với $x, y \in \mathbb{Z}^+$.

Tổng của chúng bằng 1006, nên ta có phương trình $x + y = 1006$.

Số lớn chia cho số bé được thương là 2 và số dư là 124, nên ta có phương trình $x = 2y + 124$.

Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y = 1006 \\ x = 2y + 124 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 712 \\ y = 294. \end{cases}$$

Vậy hai số đó là 712 và 294. □

❖ **Bài 40.** Tìm số tự nhiên N có hai chữ số, biết rằng nếu viết thêm chữ số 3 vào giữa hai chữ số của số N thì được một số lớn hơn số $2N$ là 585 đơn vị, và nếu viết hai chữ số của số N theo thứ tự ngược lại thì được một số nhỏ hơn số N là 18 đơn vị.

🗨 **Lời giải.**

Gọi số có hai chữ số cần tìm là $\overline{ab}$, với $a, b \in \mathbb{N}^*$.

Từ giả thiết bài toán ta có hệ

$$\begin{cases} 100a + 30 + b - 2(10a + b) = 585 \\ 10a + b - (10b + a) = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 80a - b = 555 \\ 9a - 9b = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 80a - b = 555 & (1) \\ -a + b = -2 & (2) \end{cases}$$

Cộng hai vế của phương trình (1) và (2) của hệ ta được $79a = 553 \Rightarrow a = 7$.

Thay $a = 7$ vào phương trình thứ (2) của hệ ta được $-7 + b = -2 \Rightarrow b = 5$.

Các giá trị $a = 7$ và $b = 5$ đều thỏa mãn điều kiện bài toán.

Vậy số N cần tìm là 75. □

❖ **Bài 41.** Trong một đợt khuyến mãi, siêu thị giảm giá cho mặt hàng A là 20% và mặt hàng B là 15% so với giá niêm yết. Một khách hàng mua 2 món hàng A và 1 món hàng B thì phải trả số tiền là 362 000 đồng. Nhưng nếu mua trong khung giờ vàng thì mặt hàng A được giảm giá 30% và mặt hàng B được giảm giá 25% so với giá niêm yết. Một khách hàng mua 3 món hàng A và 2 món hàng B trong khung giờ vàng nên phải trả số tiền là 552 000 đồng. Tính giá niêm yết của mỗi mặt hàng A và B.

🗨 **Lời giải.**

Gọi x, y (đồng) lần lượt là giá niêm yết của mỗi mặt hàng A và B ($x > 0, y > 0$).

Một khách hàng mua 2 món hàng A và 1 món hàng B thì phải trả số tiền là 362 000 đồng nên ta có

$$80\%x \cdot 2 + 85\%y = 362\,000 \text{ hay } 1,6x + 0,85y = 362\,000. \quad (1)$$

Trong giờ vàng, khách hàng mua 3 món hàng A và 2 món hàng B phải trả số tiền là 552 000 đồng nên ta có

$$70\%x \cdot 3 + 75\%y \cdot 2 = 552\,000 \text{ hay } 2,1x + 1,5y = 552\,000. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} 1,6x + 0,85y = 362\,000 \\ 2,1x + 1,5y = 552\,000. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên, ta được
$$\begin{cases} x = 120\,000 \\ y = 200\,000. \end{cases}$$

Vậy giá niêm yết của mặt hàng A là 120 000 đồng, mặt hàng B là 200 000 đồng. □

❖ **Bài 42.** Một nhóm công nhân cần phải cắt cỏ ở một số mặt sân cỏ. Nếu nhóm công nhân đó sử dụng 3 máy cắt cỏ ngồi lái và 2 máy cắt cỏ đẩy tay trong 10 phút thì cắt được 2990 m² cỏ. Nếu nhóm công nhân đó sử dụng 4 máy cắt cỏ ngồi lái và 3 máy cắt cỏ đẩy tay trong 10 phút thì cắt được 4060 m² cỏ. Hỏi trong 10 phút, mỗi loại máy trên sẽ cắt được bao nhiêu mét vuông cỏ?

🗨 **Lời giải.**

Gọi x, y lần lượt là số mét vuông cỏ cắt được trong 10 phút của máy cắt cỏ ngồi lái và máy cắt cỏ đẩy tay ($x > 0, y > 0$).

Vì khi sử dụng 3 máy cắt cỏ ngồi lái và 2 máy cắt cỏ đẩy tay trong 10 phút thì cắt được 2990 m² cỏ nên ta có phương trình

$$3x + 2y = 2990. \quad (1)$$

Vì khi sử dụng 4 máy cắt cỏ ngồi lái và 3 máy cắt cỏ đẩy tay trong 10 phút thì cắt được 4060 m² cỏ nên ta có phương trình

$$4x + 3y = 4060. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} 3x + 2y = 2990 \\ 4x + 3y = 4060. \end{cases}$$

Giải hệ trên ta được $\begin{cases} x = 850 \\ y = 220. \end{cases}$

Vậy trong 10 phút, máy cắt cỏ ngồi lái cắt được 850 m² và máy cắt cỏ đẩy tay cắt được 220 m². □

❖ **Bài 43.** Tại một buổi biểu diễn nhằm gây quỹ từ thiện, ban tổ chức đã bán được 500 vé. Trong đó có hai loại vé: vé loại I giá 100 000 đồng; vé loại II giá 75 000 đồng. Tổng số tiền thu được từ bán vé là 44 500 000 đồng. Tính số vé bán ra của mỗi loại.

💡 **Lời giải.**

Gọi x, y lần lượt là số vé loại I, II mà ban tổ chức bán ra ($x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}$).

Vì ban tổ chức bán được 500 vé nên ta có phương trình

$$x + y = 500. \quad (1)$$

Vì tổng số tiền thu được từ bán vé là 44 500 000 đồng nên ta có phương trình

$$100\,000x + 75\,000y = 44\,500\,000. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 500 \\ 100\,000x + 75\,000y = 44\,500\,000. \end{cases}$

Giải hệ phương trình trên, ta được $\begin{cases} x = 280 \\ y = 220. \end{cases}$

Vậy số vé loại I bán được là 280 vé, số vé loại II bán được là 220 vé. □

❖ **Bài 44.** Nhà máy luyện thép hiện có sẵn loại thép chứa 10% carbon và loại thép chứa 20% carbon. Giả sử trong quá trình luyện thép các nguyên liệu không bị hao hụt. Tính khối lượng thép mỗi loại cần dùng để luyện được 1000 tấn thép chứa 16% carbon từ hai loại thép trên.

💡 **Lời giải.**

Gọi khối lượng thép chứa 10% carbon là x tấn và khối lượng thép chứa 20% carbon là y tấn với $x, y > 0$.

Khối lượng carbon có trong x tấn thép 10% carbon là $10\%x = 0,1x$.

Khối lượng carbon có trong y tấn thép 20% carbon là $20\%x = 0,2y$.

1000 tấn thép chứa 16% carbon, nên ta có phương trình $0,1x + 0,2y = 1000 \cdot 16\%$.

Khối lượng thép mỗi loại cần dùng để luyện được 1000 tấn, nên ta có phương trình $x + y = 1000$.

Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 0,1x + 0,2y = 1000 \cdot 16\% \\ x + y = 1000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 1600 \\ x + y = 1000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 400 \\ y = 600. \end{cases}$$

Vậy cần 400 tấn thép loại 10% carbon và 600 tấn thép loại 20% carbon. □

❖ **Bài 45.** Trong một xí nghiệp, hai tổ công nhân A và B lắp ráp cùng một loại bộ linh kiện điện tử. Nếu tổ A lắp ráp trong 5 ngày, tổ B lắp ráp trong 4 ngày thì xong 1900 bộ linh kiện. Biết rằng mỗi ngày tổ A lắp ráp nhiều hơn tổ B là 20 bộ linh kiện. Hỏi trong một ngày mỗi tổ lắp được bao nhiêu bộ linh kiện điện tử? (Năng suất lắp ráp của mỗi tổ trong các ngày là như nhau).

💡 **Lời giải.**

Gọi x, y lần lượt là bộ linh kiện điện tử của tổ A và B trong một ngày với $x, y \in \mathbb{N}^*$.

Mỗi ngày tổ A lắp ráp nhiều hơn tổ B là 20 bộ linh kiện, nên ta có phương trình $x - y = 20$.

Tổ A lắp ráp trong 5 ngày, tổ B lắp ráp trong 4 ngày thì xong 1900 bộ linh kiện, nên ta có phương trình $5x + 4y = 1900$.

Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x - y = 20 \\ 5x + 4y = 1900 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 220 \\ y = 200. \end{cases}$$

Vậy mỗi ngày tổ A lắp được 220 bộ linh kiện điện tử, tổ B lắp được 200 bộ linh kiện điện tử. □

🔗 **Bài 46.** Giải bài toán cổ sau:

Quýt, cam mười bảy quả tươi
 Dem chia cho một trăm người cùng vui
 Chia ba mỗi quả quýt rồi
 Còn cam mỗi quả chia mười vừa xinh
 Trăm người, trăm miếng ngọt lành
 Quýt, cam mỗi loại tính rành là bao?

💡 **Lời giải.**

Gọi x, y lần lượt là số quả quýt và số quả cam với $x, y \in \mathbb{N}^*$.

Quýt, cam mười bảy quả tươi, nên ta có phương trình $x + y = 17$.

Trăm người, trăm miếng ngọt lành, nên ta có phương trình $3x + 10y = 100$.

Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y = 17 \\ 3x + 10y = 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 7. \end{cases}$$

Vậy có 10 quả cam và 7 quả quýt. □

🔗 **Bài 47.** Nhân kỉ niệm ngày Quốc khánh 2/9, một nhà sách giảm giá mỗi cây bút bi là 20% và mỗi quyển vở là 10% so với giá niêm yết. Bạn Thanh vào nhà sách mua 20 quyển vở và 10 cây bút bi. Khi tính tiền, bạn Thanh đưa 175000 đồng và được trả lại 3000 đồng. Tính giá niêm yết của mỗi quyển vở và mỗi cây bút bi, biết rằng tổng số tiền phải trả nếu không được giảm giá là 195000 đồng.

💡 **Lời giải.**

Gọi x, y lần lượt là giá tiền niêm yết của mỗi quyển vở và mỗi cây bút bi với $x, y > 0$.

Số tiền mua 20 quyển vở và 10 cây bút bi khi giảm giá là

$$20 \cdot 90\%x + 10 \cdot 80\%y = 175000 - 3000 \Rightarrow 18x + 8y = 172000.$$

Tổng số tiền phải trả nếu không được giảm giá là 195000 đồng, nên ta có phương trình

$$20x + 10y = 195000.$$

Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 18x + 8y = 172000 \\ 20x + 10y = 195000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 8000 \\ y = 3500. \end{cases}$$

Vậy giá niêm yết của mỗi quyển vở là 8000 đồng, mỗi cây bút bi và 3500 đồng. □

🔗 **Bài 48.** Ở giải bóng đá Ngoại hạng Anh mùa giải 2003 – 2004, đội Arsenal đã thi đấu 38 trận mà không thua trận nào và giành chức vô địch với 90 điểm. Biết rằng với mỗi trận đấu, đội thắng được 3 điểm, đội thua không có điểm và nếu hai đội hoà nhau thì mỗi đội được 1 điểm. Mùa giải đó đội Arsenal đã giành được bao nhiêu trận thắng?

💡 **Lời giải.**

Gọi x, y lần lượt là số trận thắng và số trận hoà với $x, y \in \mathbb{N}^*$.

Đội Arsenal đã thi đấu 38 trận mà không thua trận, nên ta có phương trình $x + y = 38$.

Mỗi trận đấu, đội thắng được 3 điểm, đội thua không có điểm và nếu hai đội hoà nhau thì mỗi đội được 1 điểm, nên ta có phương trình $3x + y = 90$.

Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y = 38 \\ 3x + y = 90 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 26 \\ y = 12. \end{cases}$$

Vậy có 26 trận thắng và 12 trận hoà. □

❖ **Bài 49.** Trên cánh đồng có diện tích 160 ha của một đơn vị sản xuất, người ta dành 60 ha để cấy thí điểm giống lúa mới, còn lại vẫn cấy giống lúa cũ. Khi thu hoạch, đầu tiên người ta gặt 8 ha giống lúa cũ và 7 ha giống lúa mới để đối chứng. Kết quả là 7 ha giống lúa mới cho thu hoạch nhiều hơn 8 ha giống lúa cũ là 2 tấn thóc. Biết rằng tổng số thóc (cả hai giống) thu hoạch cả vụ trên 160 ha là 860 tấn. Hỏi năng suất của mỗi giống lúa trên 1 ha là bao nhiêu tấn thóc?

🗨 **Lời giải.**

Gọi năng suất lúa trên 1 ha của giống lúa mới là x (tấn), của giống lúa cũ là y (tấn). Điều kiện $x > 0$ và $y > 0$. Theo giả thiết ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 7x - 8y = 2 \\ 60x + 100y = 860 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{7x - 2}{8} & (1) \\ 6x + 10y = 86. & (2) \end{cases}$$

Thay $y = \frac{7x - 2}{8}$ và phương trình (2) ta được $6x + 10 \cdot \frac{7x - 2}{8} = 86 \Rightarrow x = 6$.

Thay $x = 6$ vào phương trình (1) ta được $y = \frac{7 \cdot 6 - 2}{8} = 5$.

Các giá trị $x = 6, y = 5$ thỏa mãn điều kiện bài toán.

Vậy năng suất trên 1 ha của giống lúa mới và lúa cũ lần lượt là 6 tấn và 5 tấn. □

❖ **Bài 50.** Một hợp tác vận tải có 15 xe ô tô nhỏ và 10 xe ô tô lớn thì vận chuyển được 690 khách. Nếu hợp tác vận tải rút bớt 10 xe ô tô nhỏ và tăng thêm 4 xe ô tô lớn thì số khách chuyển được tăng thêm 20 người. Hỏi mỗi loại xe chở được bao nhiêu người?

🗨 **Lời giải.**

Gọi số khách mà một ô tô nhỏ chở được là x (khách, $x \in \mathbb{N}$);

Số khách mà một ô tô lớn chở được là y (khách, $y \in \mathbb{N}$).

Theo đề bài ta có hệ phương trình $\begin{cases} 15x + 10y = 690 \\ 5x + 14y = 710 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 16 \\ y = 45 \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy loại xe ô tô nhỏ chở được 16 khách, loại xe ô tô lớn chở được 45 khách. □

❖ **Bài 51.** Một hình chữ nhật có chu vi 26 m. Nếu tăng chiều dài thêm 2 m và tăng chiều rộng thêm 3m thì diện tích tăng thêm 40 m^2 . Tính kích thước của hình chữ nhật.

🗨 **Lời giải.**

Gọi chiều dài hình chữ nhật là x (m, $x > 0$); chiều rộng hình chữ nhật là y (m, $y > 0$).

Chu vi hình chữ nhật là 26 m, ta có phương trình $(x + y) \cdot 2 = 26$. (1)

Nếu tăng chiều dài thêm 2 m và tăng chiều rộng thêm 3m thì diện tích tăng thêm 40 m^2 , ta có phương trình $(x + 2) \cdot (y + 3) = xy + 40$. (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình $\begin{cases} (x + y) \cdot 2 = 26 \\ (x + 2) \cdot (y + 3) = xy + 40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 5 \end{cases}$ thỏa mãn điều kiện.

Vậy kích thước hình chữ nhật là 8 m; 5 m. □

❖ **Bài 52.** Hai trường THCS có tất cả 300 học sinh dự thi vào lớp 10 THPT. Biết rằng trường thứ nhất có 75% số học sinh đỗ, trường thứ hai có 60% số học sinh đỗ nên cả hai trường có 207 học sinh đỗ vào lớp 10. Hỏi mỗi trường có bao nhiêu học sinh dự thi.

🗨 **Lời giải.**

Gọi số học sinh của trường thứ nhất dự thi là x (em; $x \in \mathbb{N}$).

Số học sinh của trường thứ hai dự thi là y (em; $y \in \mathbb{N}$).

Theo đề bài ta có hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 300 \\ \frac{75x}{100} + \frac{60y}{100} = 207 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 180 \\ y = 120 \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy số học sinh của trường thứ nhất là 180 em; số học sinh của trường thứ hai là 120 em. □

❖ **Bài 53.** Hai tổ sản xuất, tổ I làm trong 6 ngày, tổ II làm trong 8 ngày được tất cả 620 sản phẩm. Biết rằng số sản phẩm tổ I làm trong 4 ngày đúng bằng số sản phẩm tổ II làm trong 5 ngày. Hỏi mỗi ngày, mỗi tổ làm được bao nhiêu sản phẩm?

🗨 **Lời giải.**

Gọi số sản phẩm tổ I làm trong một ngày là x (sản phẩm; $x \in \mathbb{N}$).

Số sản phẩm tổ II làm trong một ngày là y (sản phẩm; $y \in \mathbb{N}$).

Theo đề bài ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} 6x + 8y = 620 \\ 4x = 5y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 50 \\ y = 40 \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Vậy số sản phẩm làm trong một ngày của tổ I là 50 sản phẩm; tổ II là 40 sản phẩm. □

❖ **Bài 54.** Một xe tải lớn chở 10 chuyến hàng và một xe nhỏ chở 5 chuyến hàng thì được 60 tấn. Biết rằng 3 chuyến của xe lớn chở nhiều hơn 7 chuyến xe nhỏ là 1 tấn. Hỏi mỗi xe chở được bao nhiêu tấn hàng một chuyến?

🗨 **Lời giải.**

Gọi lượng hàng xe lớn chở trong một chuyến là x (tấn; $x \in \mathbb{N}$).

Lượng hàng xe nhỏ chở trong một chuyến là y (tấn; $y \in \mathbb{N}$).

Theo đề bài ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} 10x + 5y = 60 \\ 3x - 7y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Vậy xe lớn một chuyến chở được 5 tấn, xe nhỏ chở được 2 tấn. □

❖ **Bài 55.** Hai phân xưởng của nhà máy theo kế hoạch phải làm 300 sản phẩm. Nhưng phân xưởng I đã thực hiện 110% kế hoạch, phân xưởng II đã thực hiện 120% kế hoạch, do đó đã sản xuất được 340 sản phẩm. Tính số sản phẩm mỗi phân xưởng phải làm theo kế hoạch.

🗨 **Lời giải.**

Gọi số sản phẩm phân xưởng I làm theo kế hoạch là x (sản phẩm, $x > 0$).

Số sản phẩm phân xưởng II làm theo kế hoạch là y (sản phẩm, $y > 0$).

Theo đề bài ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y = 300 \\ \frac{110x}{100} + \frac{120y}{100} = 340 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 200 \\ y = 100 \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Vậy phân xưởng I làm theo kế hoạch là 200 sản phẩm, phân xưởng II làm theo kế hoạch là 100 sản phẩm. □

❖ **Bài 56.** Một người mua hai loại hàng và phải trả tổng cộng là 21,7 triệu đồng, kể cả thuế giá trị gia tăng (VAT) với mức 10% đối với loại hàng thứ nhất và 8% đối với loại hàng thứ hai. Nếu thuế VAT là 9% đối với cả hai loại hàng thì người đó phải trả tổng cộng 21,8 triệu đồng. Hỏi nếu không kể thuế VAT thì người đó phải trả bao nhiêu tiền cho mỗi loại hàng?

🗨 **Lời giải.**

Giả sử giá của loại hàng thứ nhất và thứ hai không tính VAT lần lượt là x triệu đồng và y triệu đồng. Điều kiện $0 < x < 2,17$, $0 < y < 2,17$.

Nếu áp dụng mức thuế VAT 10% đối với loại hàng thứ nhất và 8% đối với loại hàng thứ hai thì

✔ Giá mặt hàng thứ nhất tính cả thuế VAT là $x + 10\% \cdot x = x + 0,1x = 1,1x$.

✔ Giá mặt hàng thứ hai tính cả thuế VAT là $y + 8\% \cdot y = y + 0,08y = 1,08y$.

Số tiền người đó phải trả là 2,17 triệu đồng nên ta có phương trình:

$$1,1x + 1,08y = 2,17 \Rightarrow 110x + 108y = 217.$$

Nếu áp dụng mức thuế VAT 9% đối với cả hai loại hàng thì:

✔ Giá mặt hàng thứ nhất tính cả thuế VAT là $x + 9\% \cdot x = x + 0,09x = 1,09x$.

✔ Giá mặt hàng thứ hai tính cả thuế VAT là $y + 9\% \cdot y = y + 0,09y = 1,09y$.

Số tiền người đó phải trả là 2,18 triệu đồng nên ta có phương trình

$$1,09x + 1,09y = 2,18 \Rightarrow x + y = 2.$$

Khi đó ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 110x + 108y = 217 \\ x + y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 110x + 108y = 217 & (1) \\ y = 2 - 2x. & (2) \end{cases}$$

Thay (1) vào (2) ta được $110x + 108(2 - 2x) = 217 \Rightarrow x = 0,5$.

Thay $x = 0,5$ vào phương trình (2), ta được $0,5 + y = 2 \Rightarrow y = 1,5$.

Vậy nếu không kể thuế VAT thì người đó phải trả: 0,5 triệu cho loại hàng thứ nhất và 1,5 triệu cho loại hàng thứ hai. □

❖ **Bài 57.** Một ca nô đi xuôi dòng từ địa điểm A đến địa điểm B và lại ngược dòng từ địa điểm B về địa điểm A mất 9 giờ, tốc độ của ca nô khi nước yên lặng không đổi trên suốt quãng đường đó và tốc độ của dòng nước cũng không đổi khi ca nô chuyển động. Biết thời gian ca nô đi xuôi dòng 5 km bằng thời gian ca nô đi ngược dòng 4 km và quãng đường AB là 160 km. Tính tốc độ của ca nô khi nước yên lặng và tốc độ của dòng nước.

🗨️ Lời giải.

Gọi vận tốc xuôi dòng của ca nô là x (km/h), thời gian đi xuôi dòng của ca nô là y (giờ) ($x > 0, y > 0$).

Vì quãng đường AB là 160 km nên ta có phương trình $xy = 160$. (1)

Vì ca nô đi xuôi dòng 5 km bằng thời gian ca nô đi ngược dòng 4 km nên vận tốc ngược dòng là $\frac{4}{5}x$.

Vì ca nô đi xuôi dòng từ địa điểm A đến địa điểm B và lại ngược dòng từ địa điểm B về địa điểm A mất 9 giờ nên thời gian đi ngược dòng là $9 - y$.

Khi đó ta có phương trình $\frac{4}{5}x \cdot (9 - y) = 160$. (2)

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} xy = 160 \\ \frac{4}{5}x \cdot (9 - y) = 160 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} xy = 160 \\ \frac{36}{5}x - \frac{4}{5}xy = 160 \end{cases}$$

Thay $xy = 160$ vào phương trình $\frac{36}{5}x - \frac{4}{5}xy = 160$, ta được $\frac{36}{5}x - \frac{4}{5} \cdot 160 = 160$.

Giải phương trình trên, ta được $x = 40$ (km/h). Do đó $x = \frac{160}{40} = 4$ (giờ).

Do đó vận tốc xuôi dòng là 40 km/h, vận tốc ngược dòng $\frac{4}{5} \cdot 40 = 32$ km/h.

Vận tốc của dòng nước là $(40 - 32) : 2 = 4$ km/h.

Vận tốc của ca nô khi nước yên lặng là $40 - 4 = 36$ km/h. □

❖ **Bài 58.** Hai vật chuyển động đều trên một đường tròn đường kính 20 cm, xuất phát cùng một lúc, từ cùng một điểm. Nếu chuyển động ngược chiều thì cứ sau 4 giây chúng lại gặp nhau. Nếu chuyển động cùng chiều thì cứ 20 giây chúng lại gặp nhau. Tính vận tốc (cm/s) của mỗi vật.

🗨️ Lời giải.

Gọi vận tốc của hai vật lần lượt là x (cm/s) và y (cm/s). Điều kiện $x, y > 0$.

Chu vi vòng tròn là $20 \cdot \pi$ (cm).

Khi chuyển động cùng chiều, cứ 20 giây chúng lại gặp nhau, nghĩa là quãng đường 2 vật đi được trong 20 giây chênh lệch nhau đúng bằng 1 vòng tròn. Do đó, ta có phương trình: $20x - 20y = 20\pi$.

Khi chuyển động ngược chiều, cứ 4 giây chúng lại gặp nhau, nghĩa là tổng quãng đường hai vật đi được trong 4 giây là đúng 1 vòng tròn. Khi đó, ta có phương trình: $4x + 4y = 20\pi$.

Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 20x - 20y = 20\pi \\ 4x + 4y = 20\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = \pi & (1) \\ x + y = 5\pi. & (2) \end{cases}$$

Cộng hai vế của phương trình (1) và (2) ta được $2x = 6\pi \Rightarrow x = 3\pi$ (thỏa mãn).

Thay $x = 3\pi$ vào phương trình (2) ta được $3\pi + y = 5\pi \Rightarrow y = 2\pi$ (thỏa mãn).

Vậy vận tốc của hai vật là 3π cm/s, 2π cm/s. □

❖ **Bài 59.** Hai vòi nước cùng chảy thì sau 5h 50 phút sẽ đầy bể. Nếu để hai vòi cùng chảy trong 5 giờ rồi khóa vòi thứ nhất lại thì vòi thứ hai phải chảy trong 2 giờ nữa mới đầy bể. Tính xem nếu để mỗi vòi chảy một mình thì trong bao lâu sẽ đầy bể?

💡 **Lời giải.**

Đổi 5h 50 phút $= 5\frac{5}{6}$ giờ $= \frac{35}{6}$ giờ.

Gọi thời gian vòi một chảy một mình đầy bể hết x (giờ, $x > 0$);

Thời gian vòi hai chảy một mình đầy bể hết y (giờ, $y > 0$).

Hai vòi chảy thì sau 5h 50 phút $\left(\frac{35}{6}\right)$ giờ sẽ đầy bể, ta có phương trình

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{6}{35}. \quad (1)$$

Nếu hai vòi cùng chảy trong 5 giờ rồi khóa một vòi lại thì vòi hai chảy tiếp 2 giờ mới đầy bể, ta có phương trình

$$5 \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) + \frac{2}{y} = 1. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{6}{35} \\ 5 \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) + \frac{2}{y} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 14 \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Vậy vòi một chảy một mình đầy bể trong 10 giờ, vòi hai chảy đầy bể một mình trong 14 giờ. □

❖ **Bài 60.** Hai người thợ cùng làm chung một công việc trong 7 giờ 12 phút thì xong. Nếu người thứ nhất làm trong 5 giờ và người thứ hai làm trong 6 giờ thì cả hai chỉ làm được $\frac{3}{4}$ công việc. Hỏi mỗi người làm một mình trong thời gian bao lâu hoàn thành công việc đó?

💡 **Lời giải.**

Ta có 7 giờ 12 phút $= \frac{36}{5}$ giờ.

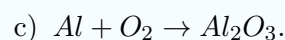
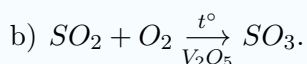
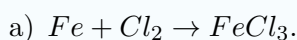
Gọi thời gian người thứ nhất làm một mình hoàn thành công việc hết x (giờ, $x \in \mathbb{N}$).

Người thứ hai làm một mình hoàn thành công việc hết y (giờ, $y \in \mathbb{N}$).

Theo đề bài ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{36} \\ \frac{5}{x} + \frac{6}{y} = \frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 12 \\ y = 18 \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

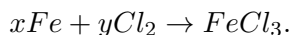
Vậy người thứ nhất làm một mình hoàn thành công việc hết 12 giờ; người thứ hai làm một mình hoàn thành công việc hết 18 giờ. □

❖ **Bài 61.** Cân bằng các phương trình hoá học sau bằng phương pháp đại số.



💡 **Lời giải.**

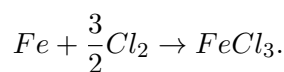
a) Gọi x, y lần lượt là hệ số của Fe và Cl_2 thỏa mãn cân bằng phương trình hóa học $x, y > 0$.



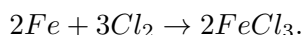
Cân bằng số nguyên tử Fe và số nguyên tử Cl ở hai vế ta có hệ

$$\begin{cases} x = 1 \\ 2y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{3}{2} \end{cases}.$$

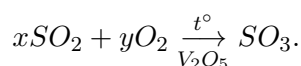
Khi đó ta có



Do hệ số của phương trình hóa học phải là số nguyên nên nhân hai vế phương trình hóa học trên với 2, ta được



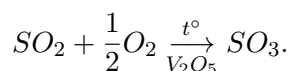
b) Gọi x, y lần lượt là hệ số của SO_2 và O_2 thỏa mãn cân bằng phương trình hóa học $x, y > 0$.



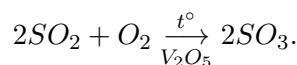
Cân bằng số nguyên tử S và số nguyên tử O ở hai vế ta có hệ

$$\begin{cases} x = 1 \\ 2x + 2y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

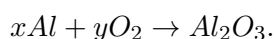
Khi đó ta có



Do hệ số của phương trình hóa học phải là số nguyên nên nhân hai vế phương trình hóa học trên với 2, ta được



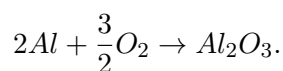
c) Gọi x, y lần lượt là hệ số của Al và O_2 thỏa mãn cân bằng phương trình hóa học $x, y > 0$.



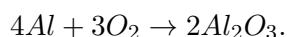
Cân bằng số nguyên tử Al và số nguyên tử O ở hai vế ta có hệ

$$\begin{cases} x = 2 \\ 2y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{3}{2} \end{cases}.$$

Khi đó ta có



Do hệ số của phương trình hóa học phải là số nguyên nên nhân hai vế phương trình hóa học trên với 2, ta được



□

❖ **Bài 62.** Trong phòng thí nghiệm, cô Linh muốn tạo ra 500 g dung dịch HCl 19% từ hai loại dung dịch HCl 10% và HCl 25%. Hỏi cô Linh cần dùng bao nhiêu gam cho mỗi loại dung dịch đó?

🗨️ Lời giải.

Gọi x, y lần lượt là số gam dung dịch HCl 10% và HCl 25% cô Linh cần dùng ($x > 0, y > 0$). Vì dung dịch tạo thành có 500 g nên ta có phương trình

$$x + y = 500. \quad (1)$$

Vì nồng độ dung dịch sau khi tạo là HCl 19% nên ta có

$$\frac{10\%x + 25\%y}{500} = 19\%. \text{ hay } 0,1x + 0,25y = 95. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 500 \\ 0,1x + 0,25y = 95. \end{cases}$

Giải hệ phương trình trên, ta được $\begin{cases} x = 200 \\ y = 300. \end{cases}$

Vậy cô Linh đã dùng 200 gam dung dịch HCl 10%, và 300 gam dung dịch HCl 25%. □

B BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

❖ **Câu 1.** Tất cả các nghiệm của phương trình $(x + 3)(2x - 6) = 0$ là
 (A) $x = -3$. (B) $x = 3$. (C) $x = 3$ hay $x = -3$. (D) $x = 2$.

💡 **Lời giải.**

Ta có: $(x + 3)(2x - 6) = 0$ nên $x + 3 = 0$ hoặc $2x - 6 = 0$

- ☑ $x + 3 = 0$ suy ra $x = -3$.
- ☑ $2x - 6 = 0$ hay $2x = 6$, suy ra $x = 3$.

Phương trình có hai nghiệm $x = -3, x = 3$.

Chọn đáp án (C) □

❖ **Câu 2.** Điều kiện xác định của phương trình $\frac{2x + 3}{x - 4} + 2 = \frac{1}{x - 3}$
 (A) $x \neq 4$. (B) $x \neq 3$. (C) $x \neq 4$ và $x \neq 3$. (D) $x = 4$ và $x = 3$.

💡 **Lời giải.**

Để phương trình $\frac{2x + 3}{x - 4} + 2 = \frac{1}{x - 3}$ xác định thì $\begin{cases} x - 4 \neq 0 \\ x - 3 \neq 0 \end{cases}$, suy ra $\begin{cases} x \neq 4 \\ x \neq 3. \end{cases}$

Chọn đáp án (C) □

❖ **Câu 3.** Nghiệm của phương trình $\frac{1}{x} - \frac{3}{2x} = \frac{1}{6}$ là
 (A) $x = 3$. (B) $x = -3$. (C) $x = 6$. (D) $x = -6$.

💡 **Lời giải.**

Với điều kiện xác định $x \neq 0$, ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} - \frac{3}{2x} &= \frac{1}{6} \\ \frac{6}{6x} - \frac{9}{6x} &= \frac{x}{6x} \\ 6 - 9 &= x \\ x &= -3. \end{aligned}$$

Ta thấy $x = -3$ thỏa mãn điều kiện xác định.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = -3$.

Chọn đáp án (B) □

❖ **Câu 4.** Nghiệm của phương trình $\frac{x + 2}{x - 4} - 1 = \frac{30}{(x + 3)(x - 4)}$ là
 (A) $x = 2$. (B) $x = -3$. (C) $x = 4$. (D) $x = -2$.

Lời giải.

Với điều kiện $\begin{cases} x \neq 4 \\ x \neq -3 \end{cases}$, ta có:

$$\begin{aligned} \frac{x+2}{x-4} - 1 &= \frac{30}{(x+3)(x-4)} \\ \frac{(x+2)(x+3)}{(x+3)(x-4)} - \frac{(x-4)(x+3)}{(x+3)(x-4)} &= \frac{30}{(x+3)(x-4)} \\ \frac{x^2+5x+6}{(x+3)(x-4)} - \frac{x^2-x-12}{(x+3)(x-4)} &= \frac{30}{(x+3)(x-4)} \\ x^2+5x+6-x^2+x+12-30 &= 0 \\ 6x-12 &= 0 \\ x &= 2 \quad (\text{thỏa mãn}) \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(A)**



- ❖ **Câu 5.** Điều kiện xác định của phương trình $\frac{x}{2x+1} + \frac{3}{x-5} = \frac{x}{(2x+1)(x-5)}$ là
- (A)** $x \neq -\frac{1}{2}$. **(B)** $x \neq -\frac{1}{2}$ và $x \neq -5$. **(C)** $x \neq 5$. **(D)** $x \neq -\frac{1}{2}$ và $x \neq 5$.

Lời giải.

Điều kiện xác định của phương trình đã cho là

$$\begin{cases} 2x+1 \neq 0 \\ x-5 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq -\frac{1}{2} \\ x \neq 5. \end{cases}$$

Vậy điều kiện xác định đã cho là $x \neq -\frac{1}{2}$ và $x \neq 5$.

Chọn đáp án **(D)**



- ❖ **Câu 6.** Phương trình $x-1=m+4$ có nghiệm lớn hơn 1 với
- (A)** $m \geq -4$. **(B)** $m \leq 4$. **(C)** $m > -4$. **(D)** $m < -4$.

Lời giải.

Ta có $x-1=m+4$

$$x = m +$$

Để phương trình $x-1=m+4$ có nghiệm lớn hơn 1 thì

$$\begin{aligned} m+5 &> 1 \\ m &> -4. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(C)**



- ❖ **Câu 7.** Phương trình nào sau đây **không** phải là phương trình bậc nhất hai ẩn?
- (A)** $5x-y=3$. **(B)** $\sqrt{5}x+0y=0$. **(C)** $0x-4y=\sqrt{6}$. **(D)** $0x+0y=12$.

Lời giải.

Phương trình **không** phải là phương trình bậc nhất hai ẩn $0x+0y=12$.

Chọn đáp án **(D)**



- ❖ **Câu 8.** Đường thẳng biểu diễn tất cả các nghiệm của phương trình $3x-y=2$
- (A)** vuông góc với trục tung. **(B)** vuông góc với trục hoành.

(C) đi qua gốc tọa độ.

(D) đi qua điểm $A(1; 1)$.

Lời giải.

Vì $3 \cdot 1 - 1 = 2$ nên đường thẳng biểu diễn tất cả các nghiệm của phương trình $3x - y = 2$ đi qua điểm $A(1; 1)$.

Chọn đáp án **(D)** □

❖ Câu 9. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , cho các điểm $A(1; 2)$, $B(5; 6)$, $C(2; 3)$, $D(-1; -1)$. Đường thẳng $4x - 3y = -1$ đi qua hai điểm nào trong các điểm đã cho?

(A) A và B .

(B) B và C .

(C) C và D .

(D) D và A .

Lời giải.

☑ Thay tọa độ điểm $A(1; 2)$ và đường thẳng $4x - 3y = -1$, ta được $4 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = -2 \neq -1$.

☑ Thay tọa độ điểm $B(5; 6)$ và đường thẳng $4x - 3y = -1$, ta được $4 \cdot 5 - 3 \cdot 6 = 2 \neq -1$.

☑ Thay tọa độ điểm $C(2; 3)$ và đường thẳng $4x - 3y = -1$, ta được $4 \cdot 2 - 3 \cdot 3 = -1$.

☑ Thay tọa độ điểm $D(-1; -1)$ và đường thẳng $4x - 3y = -1$, ta được $4 \cdot (-1) - 3 \cdot (-1) = -1$.

Vậy đường thẳng $4x - 3y = -1$ đi qua hai điểm C và D .

Chọn đáp án **(C)** □

❖ Câu 10. Cặp số $(-2; -3)$ là nghiệm của phương trình nào sau đây?

(A) $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$

(B) $\begin{cases} 2x - y = -1 \\ x - 3y = 8 \end{cases}$

(C) $\begin{cases} 2x - y = -1 \\ x - 3y = 7 \end{cases}$

(D) $\begin{cases} 4x - 2y = 0 \\ x - 3y = 5 \end{cases}$

Lời giải.

Ta có: $\begin{cases} 2x - y = -1 \\ x - 3y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -3 \end{cases}$.

Do đó cặp số $(-2; -3)$ là nghiệm của phương trình $\begin{cases} 2x - y = -1 \\ x - 3y = 7 \end{cases}$.

Chọn đáp án **(C)** □

❖ Câu 11. Cặp số nào sau đây là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 5x + 7y = -1 \\ 3x + 2y = -5 \end{cases}$?

(A) $(-1; 1)$.

(B) $(-3; 2)$.

(C) $(2; -3)$.

(D) $(5; 5)$.

Lời giải.

$$\begin{cases} 5x + 7y = -1 \\ 3x + 2y = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -15x - 21y = 3 \\ 15x + 10y = -25 \end{cases}$$

Cộng từng vế hai phương trình của hệ mới, ta được $-11y = -22 \Rightarrow y = 2$.

Thế giá trị $y = 2$ vào phương trình thứ nhất của hệ phương trình, ta có

$$5x + 7 \cdot 2 = -1 \Rightarrow x = -3.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(-3; 2)$.

Chọn đáp án **(B)** □

❖ **Câu 12.** Hệ phương trình $\begin{cases} 1,5x - 0,6y = 0,3 \\ -2x + y = -2. \end{cases}$

A có nghiệm là $(0; -0,5)$.

C có nghiệm là $(-3; -8)$.

B có nghiệm là $(1; 0)$.

D vô nghiệm.

🗨 **Lời giải.**

$$\begin{cases} 1,5x - 0,6y = 0,3 \\ -2x + y = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x - 2y = 1 \\ -x + 2y = -4. \end{cases}$$

Cộng từng vế hai phương trình của hệ mới, ta được $x = -3$.

Thế giá trị $x = -3$ vào phương trình thứ hai của hệ phương trình, ta có $-2 \cdot (-3) + y = -2 \Rightarrow y = -8$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(-3; -8)$.

Chọn đáp án **C** □

❖ **Câu 13.** Hệ phương trình $\begin{cases} 0,6x + 0,3y = 1,8 \\ 2x + y = -6. \end{cases}$

A có một nghiệm.

B vô nghiệm.

C có vô số nghiệm.

D có hai nghiệm.

🗨 **Lời giải.**

$$\begin{cases} 0,6x + 0,3y = 1,8 \\ 2x + y = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 3 \\ 2x + y = -6. \end{cases}$$

Từ phương trình thứ nhất của hệ mới, ta có $y = 3 - 2x$. Thế vào phương trình thứ hai của hệ ta được $2x + 3 - 2x = -6$ hay $0x = -9$. (1)

Do không có giá trị nào của x thỏa mãn hệ thức (1) nên hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

Chọn đáp án **B** □

❖ **Câu 14.** Nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 9 \\ x - y = -1 \end{cases}$ là

A $(x; y) = (4; 5)$.

B $(x; y) = (5; 4)$.

C $(x; y) = (-5; -4)$.

D $(x; y) = (-4; -5)$.

🗨 **Lời giải.**

Ta có $\begin{cases} x + y = 9 \\ x - y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 8 \\ x - y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 4 + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 5. \end{cases}$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y) = (4; 5)$.

Chọn đáp án **A** □